א. נתון מעגל שמשוואתו היא $x^2+y^2=a^2$, מעגל קנוני שרדיוסו a $(a>0)$.

הזזה של עקום $f(x,y)$ ימינה, היא במבנה של $f(x-k,y)$, $(k>0)$.

על-מנת שישיק לציר ה- y יש להזיז a יחידות (ימינה, על פי הנתון),

ולכן משוואת המעגל היא $(x-a)^2+y^2=a^2$.

ניתן, גם לומר, שמרכז המעגל יהיה $(a,0)$, ומכאן שמשוואתו $(x-a)^2+y^2=a^2$.

תשובה: משוואת המעגל שהתקבל היא $(x-a)^2+y^2=a^2$.

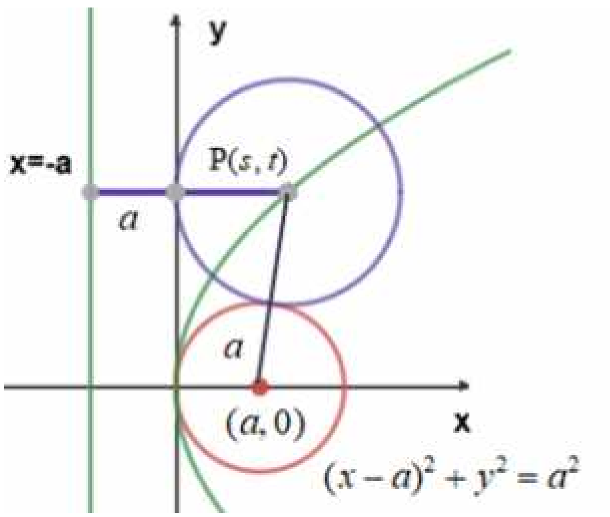
ב. נסמן $P(s,t)$, נקודה על המקום הגיאומטרי.

המעגל החדש משיק גם לציר ה- y מימין, לכן רדיוסו הוא s .

<u>**דרך אחת לפתרון**</u>

אורכו של קטע המרכזים שווה לסכום שני רדיוסי המעגלים.

$$s+a=\sqrt{(s-a)^2+(t-0)^2}$$
$$s^2+2as+a^2=s^2-2as+a^2+t^2$$
$$4as=t^2$$
$$\boxed{y^2=4ax}$$



וזאת הפרבולה $y^2=4ax$, שהמוקד שלה הוא $(a,0)$ והמדריך שלה הוא $x=-a$.

<u>**דרך שנייה לפתרון**</u>

המרחק של $P(s,t)$ מהישר $x=-a$ שווה למרחקה מנקודה קבועה $(a,0)$,

וזו בדיוק הגדרתה של הפרבולה כמקום גיאומטרי, כאשר הישר הוא המדריך, והנקודה הקבועה היא המוקד.

תשובה: משוואת המקום הגיאומטרי , שעליו נמצאים מרכזי המעגלים, היא $y^2=4ax$.

ג. הישר $y=x+3$ משיק בנקודה M לפרבולה $y^2=4ax$.

משוואת המשיק לפרבולה, בנקודה שעל הפרבולה, היא $yy_0=p(x+x_0)$.

עבור $y=0$ נקבל שנקודת החיתוך עם ציר ה- x היא $(-x_0,0)$.

הישר $y=x+3$ חותך את ציר ה- x בנקודה $(-3,0)$, ולכן $x_0=3$ ונקודת ההשקה: $(3,6)$ $y=3+3=6\rightarrow(3,6)$.

נציב במשוואת הפרבולה ונקבל $6^2=4a\cdot 3$, ומכאן ש- $a=3$.

תשובה: $a=3$.

ד. משוואת המעגל שהתקבל בסעיף א היא $(x-3)^2+y^2=9$, ומרכזו הוא $(3,0)$.

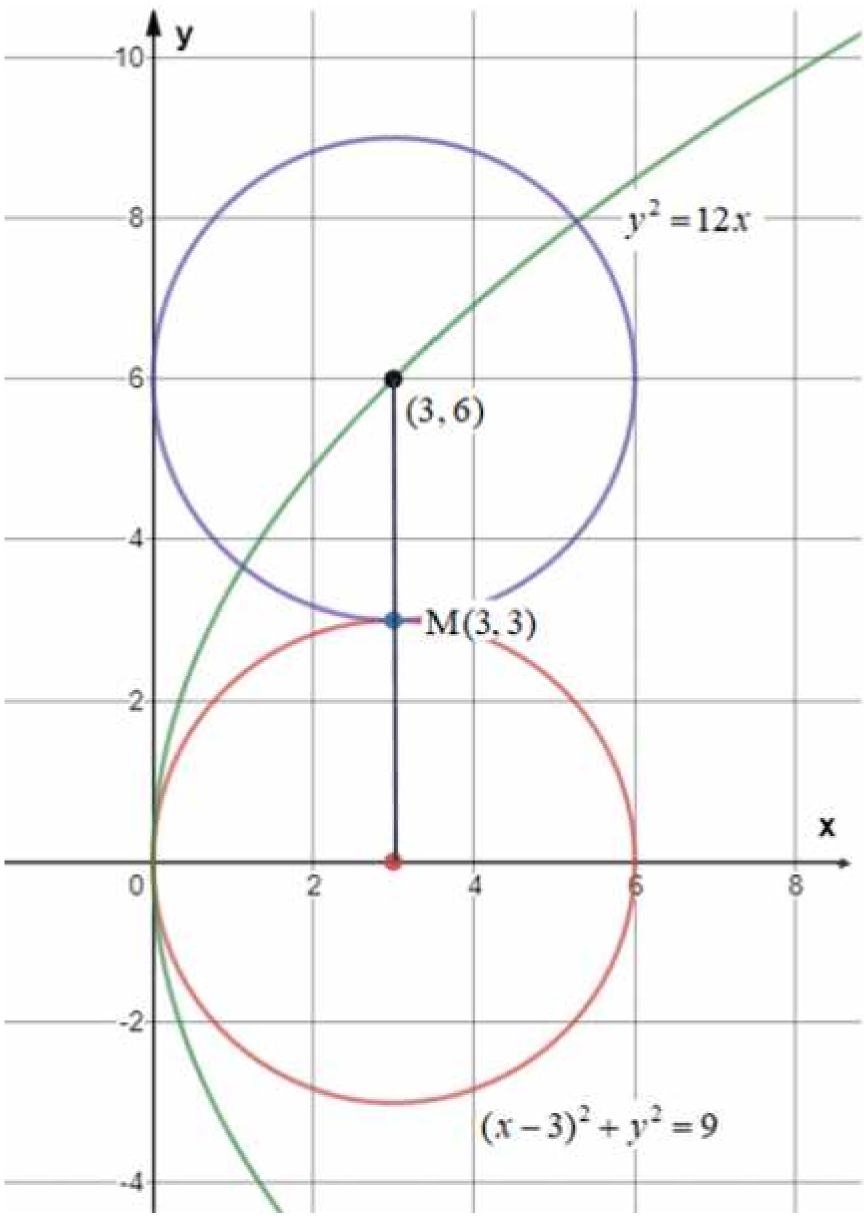
משוואת הפרבולה היא $y^2=12x$.

מרכז המעגל שנבנה כמתואר בסעיף ב הוא $(3,6)$.

התקבל ששיעורי ה- x של שני המרכזים שווים, ולכן $x=3$ הוא גם שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

רדיוס כל אחד מהמעגלים הוא 3 , ומכאן ששיעורי נקודת ההשקה הם $M(3,3)$.

תשובה: $M(3,3)$.



א. נתונה פירמידה SABCD **שבסיסה** ABCD **הוא ריבוע.**

$\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$

$\overrightarrow{SP}=t\cdot\overrightarrow{SD} \quad (t>0)$

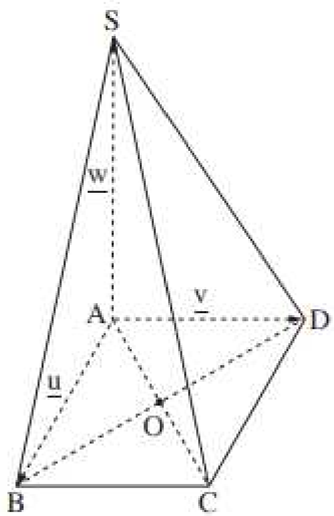
$\overrightarrow{SP}=t\cdot(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD})$

$\overrightarrow{SP}=t\underline{v}-t\underline{w}$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SP}$

$\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}+t\underline{v}-t\underline{w}$

$\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\underline{u}+(t-\frac{1}{2})\underline{v}+(1-t)\underline{w}$



תשובה: $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\underline{u}+(t-\frac{1}{2})\underline{v}+(1-t)\underline{w}$ **.**

ב. OP **יקביל למישור הפאה** SAB **אם יתקיימו שני תנאים:**

(1) $\overrightarrow{OP}$ **יהיה קומבינציה ליניארית של וקטורים הפורשים את מישור הפאה, קרי ק"ל של** $\underline{u}$ **ו-** $\underline{w}$ **.**

ולכן, עבור $t=\frac{1}{2}$ $\quad t-\frac{1}{2}=0\rightarrow$ OP **מקביל למישור הפאה, או מוכל בה.**

(2) קיימת נקודה על OP**, שאינה על מישור הפאה** SAB**.**

נתון ש- $t>0$ **ולכן** P **לא מתלכדת עם** S**, וגם** O **אינה על הפאה (מצאנו אפילו שתי נקודות מתאימות).**

מכאן שעבור $t=\frac{1}{2}$**,** OP **יקביל למישור הפאה** SAB**.**

ג. נעדכן את הנתונים.

$\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$

$\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ $|\underline{u}|=4$ $\underline{u}^2=16$

$\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ $|\underline{v}|=4$ $\underline{v}^2=16$

$\overrightarrow{AS}=\underline{w}$ $|\underline{w}|=4\sqrt{2}$ $\underline{w}^2=32$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{v}$

$\left.\begin{array}{l}\underline{u}\cdot\underline{w}=0\\ \underline{v}\cdot\underline{w}=0\end{array}\right\}\leftarrow AS\perp ABCD$

נראה ש- $\underline{u}$ הוא הנורמל למישור הפאה SAD **.**

$$\left.\begin{matrix}\underline{u}\cdot\underline{v}=0\\ \underline{u}\cdot\underline{w}=0\end{matrix}\right\}\rightarrow\ \underline{u}\perp \text{SAD}$$

מכאן שהזווית בין $\underline{u}$ להיטל של OP **ל- למישור הפאה** SAD **, היא הזווית שבין** OP **למישור הפאה** SAD**.**

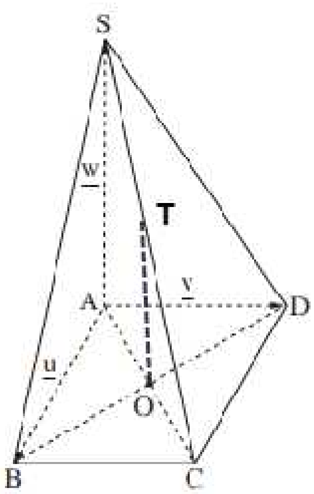
$$\sin\sim=\frac{\left|\overrightarrow{\text{OP}}\cdot\underline{u}\right|}{\left|\overrightarrow{\text{OP}}\right|\cdot\left|\underline{u}\right|}$$

$$\overrightarrow{\text{OP}}=-\frac{1}{2}\underline{u}+(t-\frac{1}{2})\underline{v}+(1-t)\underline{w}$$

$$\left|\overrightarrow{\text{OP}}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}\underline{u}^2+(t-\frac{1}{2})^2\underline{v}^2+(1-t)^2\underline{w}^2}\quad\leftarrow\underline{u}\cdot\underline{v}=0\,,\,\underline{u}\cdot\underline{w}=0\,,\,\underline{v}\cdot\underline{w}=0$$

$$\left|\overrightarrow{\text{OP}}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot16+(t-\frac{1}{2})^2\cdot16+(1-t)^2\cdot32}$$

$$\left|\overrightarrow{\text{OP}}\right|=\sqrt{48t^2-80t+40}$$



$$\overrightarrow{\text{OP}}\cdot\underline{u}=-\frac{1}{2}\underline{u}^2=-\frac{1}{2}\cdot16=-8$$

$$\sin 45^\circ=\frac{|-8|}{\sqrt{48t^2-80t+40}\cdot4}\quad(\ )^2$$

$$48t^2-80t+40=8$$

$$48t^2-80t+32=0$$

$$\boxed{t=1}\ \boxed{t=\frac{2}{3}}$$

תשובה: $t=\frac{2}{3}$ **,** $t=1$ **(בשני המקרים** P **היא נקודה על הקטע** SD**, כאשר עבור** $t=1$ **מתלכדת עם הקודקוד** D **).**

ד. TABCD **היא פירמידה ישרה, לכן הגובה יורד למרכז המעגל החוסם, קרי לנקודה** O**.**

OT **וגם** AS **מאונכים לבסיס, ולכן הם מקבילים זה לזה .**

כמו כן O **אמצע של** AC **, ולכן** OT **קטע אמצעים במשולש** ACS **, ואורכו** $\text{OT}=\frac{\text{AS}}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$**.**

$$V_{\text{TABCD}}=\frac{S_{\text{ABCD}}\cdot\text{OT}}{3}=\frac{4\cdot4\cdot2\sqrt{2}}{3}=\frac{32\sqrt{2}}{3}.$$

תשובה: נפח הפירמידה הישרה TABCD **הוא** $\frac{32\sqrt{2}}{3}$ **.**

א. נתונה סדרה הנדסית, שבה: $a_1=1$ **,** $a_2=iz$**, ולכן** $q=\frac{a_2}{a_1}=iz$ **.**

(1) נמצא את שלושת האיברים הבאים.

$$a_3=a_2q=iz\cdot iz=-z^2$$
$$a_4=a_3q=-z^2\cdot iz=-iz^3$$
$$a_5=a_4q=-iz^3\cdot iz=z^4$$

תשובה: $a_1=1$ **,** $a_2=iz$ **,** $a_3=-z^2$ **,** $a_4=-iz^3$ **,** $a_5=z^4$ **.**

(2) נראה שסכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה שווה ל- $\frac{z^5+i}{z+1}$ **.**

$$S_5=\frac{a_1(q^5-1)}{q-1}=\frac{1\cdot\left[(iz)^5-1\right]}{iz-1}=\frac{i^5z^5-1}{iz-1}=\frac{iz^5-1}{iz-1}=\frac{i(z^5+i)}{i(z+i)}$$

$$\boxed{S_5=\frac{z^5+i}{z+i}}$$

תשובה: הוכחנו שסכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה שווה ל- $\frac{z^5+i}{z+i}$**.**

ב. (1) נמצא את הפתרונות של המשוואה $z^5=-i$**, על-פי נוסחת השורשים של מספר מרוכב.**

$$z^5=-i$$
$$z^5=cis\ 270°$$
$$z_k=cis\ (\frac{270°}{5}+\frac{360°k}{5})=cis\ (54°+72°k)\ .$$
$$z_0=cis\ (54°)\ ,\ z_1=cis\ (126°)\ ,\ z_2=cis\ (198°)\ ,$$
$$z_3=cis\ (270°)=-i\ ,\ z_4=cis\ (342°)$$

$$z+\frac{1}{z}=x+iy+x-iy=2x$$

תשובה: $z_0=cis\ (54°)\ ,\ z_1=cis\ (126°)\ ,\ z_2=cis\ (198°)\ ,\ z_3=cis\ (270°)=-i\ ,\ z_4=cis\ (342°)$**.**

(2) נמצא את הפתרונות של המשוואה $1+iz-z^2-iz^3+z^4=0$**, כלומר מתי** $S_5=0$ **.**

$\frac{z^5+i}{z+i}=0\ \ \rightarrow z^5+i=0\ \ \rightarrow z^5=-i$ **, וזו בדיוק המשוואה שאת פתרונותיה מצאנו בתת סעיף ב(1).**

אולם, עבור הפתרון $z=-i$ **נקבל ש-** $q=i\cdot(-i)=1$ **והסדרה קבועה, בניגוד לנתון, ו-** $z=-i$ **אינו פתרון.**

ואכן, אם נציב $-i$ **נקבל סדרה קבועה, שסכומה** $1+i(-i)-(-i)^2-i(-i)^3+(-i)^4=1+1+1+1+1=5$**.**

ניתן גם לראות שהפתרון זה מאפס את המכנה של משוואת הסכום $\frac{z^5+i}{z+i}$**.**

תשובה: $cis\ (54°)\ ,\ cis\ (126°)\ ,\ cis\ (198°)\ ,\ cis\ (342°)$**.**

ג. הנקודה A **נמצאת ברביע השלישי במישור גאוס, ולכן היא מתאימה לפתרון** $z_2 = cis\,(198°)$ **.**

ΔABO **הוא ישר זוויות, ולכן כל צלעותיו שוות וזוויותיו שוות ל-** $60°$**.**

$|z_2| = |cis\,(198°)| = 1$, **ומכאן שגם הערך המוחלט של המספר המרוכב, המתאים לנקודה** B**, הוא 1.**

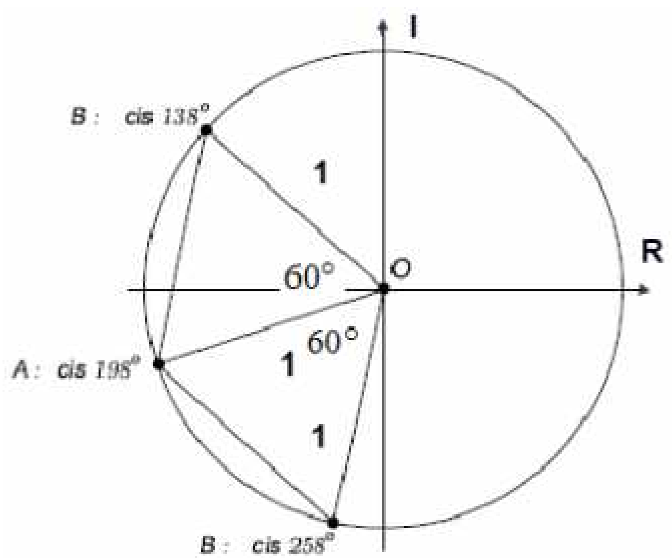
אם כך, כבר בנינו משולש שווה שוקיים, ונשאר לדאוג לכך ש- $\sphericalangle AOB = 60°$ **.**

יש שתי אפשרויות:

עם כיוון השעון: $z_B = cis\,(198° - 60°) = cis\,138°$ **.**

נגד כיוון השעון: $z_B = cis\,(198° + 60°) = cis\,258°$ **.**

תשובה: $cis\,138°$ **,** $cis\,258°$**.**



א. נתונה הפונקציה $f(x) = \ell n\,(x^2 + ax + 1)$ **,** $-2 < a < 2$ **פרמטר.**

בתחום הגדרה, הארגומנט – הביטוי שמקבלת הפונקציה, צריך להיות חיובי.

$x^2 + ax + 1 > 0$

הדיסקרימיננטה, $\Delta = b^2 - 4ac$ **, היא** $a^2 - 4$**.**

אולם, $-2 < a < 2$ **, ולכן הדיסקרימיננטה שלילית והביטוי** $x^2 + ax + 1$ **אינו מתאפס לכל** $x^2 + ax + 1$**.**

כיוון שהמקדם של x^2 **הוא חיובי, הרי שזהו טרינום של פרבולה בעלת מינימום (פרבולה מחייכת ומרחפת), ולכן חיובי לכל** x**.**

תשובה: הוכחנו ש- $f(x) = \ell n\,(x^2 + ax + 1)$ **מוגדרת לכל** x **.**

ב. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x **.**

$$\ell n\,(x^2 + ax + 1) = 0$$
$$x^2 + ax + 1 = 1$$
$$x(x + a) = 0$$
$$x = 0 \quad , \quad x = -a$$

תשובה: $(0, 0)$ **,** $(-a, 0)$**.**

ג. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x) = \ell n\,(x^2 + ax + 1)$ **.**

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x + a}{x^2 + ax + 1}}$$
$$2x + a = 0$$
$$x = -\frac{a}{2}$$

הביטוי $2x + a$ **הוא של פונקציה קווית עולה, ולכן עובר משליליות לחיוביות, עבור** $x = -\frac{a}{2}$ **,**

ולכן הפונקציה עוברת מירידה לעלייה, עבור $x = -\frac{a}{2}$ **.**

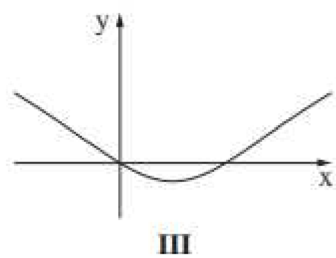
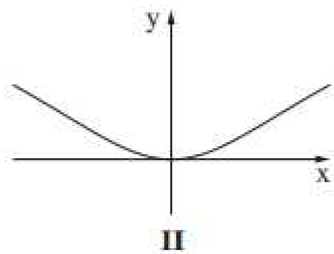
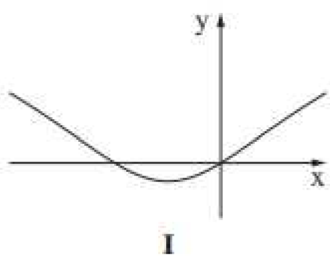
$$f(\frac{a}{2}) = \ell n\left[(-\frac{a}{2})^2 + a(-\frac{a}{2}) + 1\right]$$
$$f(\frac{a}{2}) = \ell n\,(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + 1)$$
$$f(\frac{a}{2}) = \ell n\,(1 - \frac{a^2}{4}) \quad \rightarrow \boxed{(-\frac{a}{2}, \ell n\,(1 - \frac{a^2}{4}))}$$

תשובה: $(-\frac{a}{2}, \ell n\,(1 - \frac{a^2}{4}))$ **, מינימום.**

ד. נתאים, לכל אחד מהגרפים, את הסקיצה המתאימה – כתלות בפרמטר a **.**

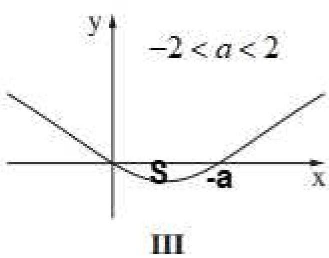
נשים לב לכך ששלושת הגרפים מראים, כמובן, את נקודת המינימום $(-\frac{a}{2}, \ell n\,(1-\frac{a^2}{4}))$**.**

כאשר, השוני הוא בסימני שיעורי ה- x **, וה-** y **.**

גרף זה מתאים עבור $-\frac{a}{2} > 0$ **.** **וכיוון שנתון כי** $-2 < a < 2$, **הרי שבמקרה זה** $-2 < a < 0$ **(2).**  	**גרף זה מתאים עבור** $-\frac{a}{2} = 0$ **.** **וכיוון שנתון כי** $-2 < a < 2$, **הרי שבמקרה זה** $a = 0$ **(3).** **נשים לב ש-** $\ell n\,(1-\frac{0^2}{4}) = \ell n\,1 = 0$ **והגרף אכן עוברת בראשית.**  	**גרף זה מתאים עבור** $-\frac{a}{2} < 0$ **.** **וכיוון שנתון כי** $-2 < a < 2$, **הרי שבמקרה זה** $0 < a < 2$ **(1).** 

תשובה: גרף III **מתאים ל- (2):** $-2 < a < 0$ **, גרף** II **מתאים ל- (3):** $a = 0$ **, גרף** I **מתאים ל- (1):** $0 < a < 2$**.**

ה. השטח המתאים, עבור $-2 < a < 2$**, מסומן ב -** S **,**



כאשר, על פי סעיף ב, נקודות החיתוך עם ציר ה- x **הן** $(0,0)$ **,** $(-a,0)$ **.**

מכאן ש- $S = \int_0^{-a} \left[0 - \ell n\,(x^2+ax+1)\right] dx = -\int_0^{-a} \left[\ell n\,(x^2+ax+1)\right] dx$**.**

נביע, באמצעות a **ו-** S**, את ערכו של האינטגרל המסוים** $\int_0^{-a} \ell n\,(4x^2+4ax+4)\,dx$**.**

$$\int_0^{-a} \ell n\,(4x^2+4ax+4)\,dx =$$

$$\int_0^{-a} \ell n\,4(x^2+ax+1)\,dx =$$

$$\int_0^{-a} \left[\ell n\,4 + \ell n(x^2+ax+1)\right] dx = \quad \leftarrow \ell og\,xy = \ell og\,x + \ell og\,y$$

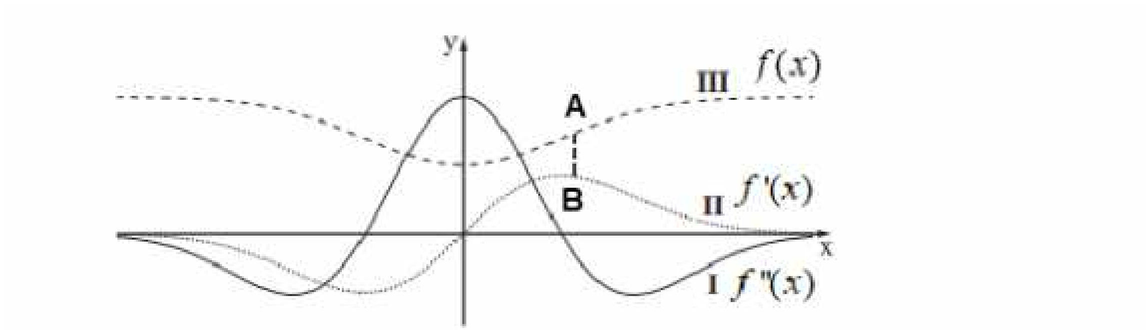
$$\int_0^{-a} \ell n\,4\,dx + \int_0^{-a} \ell n(x^2+ax+1)\,dx =$$

$$x\ell n\,4\,\Big]_0^{-a} + (-S) =$$

$$\boxed{-a\ell n\,4 - S}$$

תשובה: $\int_0^{-a} \ell n\,(4x^2+4ax+4)\,dx = -a\ell n\,4 - S$**.**

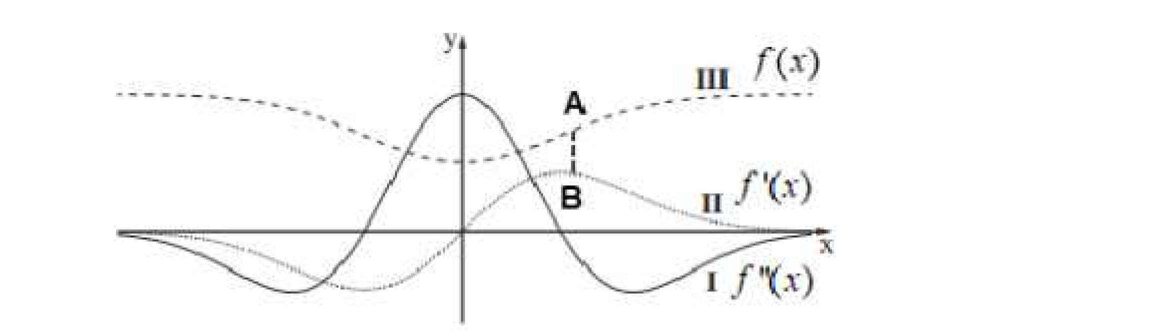
א. נתונים בסרטוט גרפים של $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ - המוגדרים לכל x .



- **נשים לב שגרף III חיובי לכל x,**
ולכן אינו יכול להיות גרף של נגזרת, כי אין כאן גרף של פונקציה קדומה שעולה לכל x.
- **גרף II עובר בראשית משליליות לחיוביות,**
ולכן לפונקציה הקדומה שלו צריכה להיות נקודת קיצון אחת בלבד, מסוג מינימום – כמו של גרף III.
- **גרף I עובר משליליות לחיוביות, ולאחר מכן מחיוביות לשליליות,**
ולכן לפונקציה הקדומה שלו יש שתי נקודות קיצון, מינימום ומקסימום (משמאל לימין), כמו של גרף II.
- **גרף I עובר משליליות לחיוביות, ולאחר מכן מחיוביות לשליליות,**
ואם הוא הגרף של $f''(x)$, אז תחומי הקעירות שלה יהיו כלפי מטה, כלפי מעלה, כלפי מטה,
בדיוק כמו של גרף III.
- **תחומי העלייה והירידה של גרף II תואמים את תחומי הקעירויות כלפי מעלה וכלפי מטה של גרף III,**
מתאים אם גרף II הוא של $f'(x)$, וגרף III הוא של $f(x)$.

תשובה: גרף I מתאים ל- $f''(x)$, גרף II מתאים ל- $f'(x)$, גרף III מתאים ל- $f(x)$.

ב. נתון כי $f'(x)=xe^{-x^2}$ **.**



הפונקציה שיש להביא למינימום היא אורך הקטע AB **, שמקביל לציר ה-** y **.**

נסמן $x_\text{A}=x_\text{B}=t$ **, ובהתאם שיעורי הנקודות הן:** $\text{A}(t,\ f(t))$ **ו-** $\text{B}(t,\ f'(t))$ **.**

$$\text{AB}=y_\text{A}-y_\text{B}=f(t)-f'(t)$$

$$(\text{AB})'=f'(t)-f''(t)$$

$$\boxed{f'(x)=xe^{-x^2}}$$

$$f''(x)=e^{-x^2}+x(-2x)e^{-x^2}$$

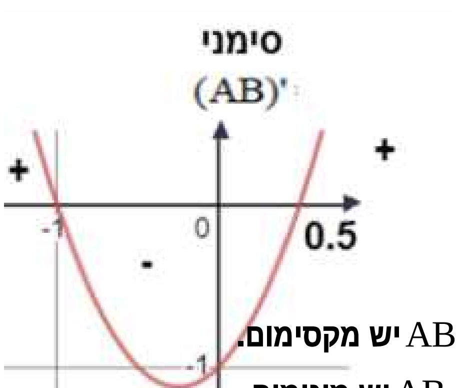
$$\boxed{f''(x)=e^{-x^2}(1-2x^2)}$$

$$(\text{AB})'(t)=te^{-t^2}-e^{-t^2}(1-2t^2)$$

$$\boxed{(\text{AB})'(t)=e^{-t^2}(2t^2+t-1)}$$

$$e^{-t^2}>0$$

$$2t^2+t-1=0 \quad \rightarrow t=-1, \quad t=0.5$$



הביטוי האלגברי $2t^2+t-1$ **קובע את סימני הנגזרת.**

עבור $t=-1$ **הנגזרת עוברת מחיוביות לשליליות, ולפונקציית אורך הקטע** AB **יש מקסימום.**

עבור $t=0.5$ **הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות, ולפונקציית אורך הקטע** AB **יש מינימום.**

תשובה: $x=0.5$ **מינימום ,** $x=-1$ **מקסימום.**

ג. נתון כי האורך המקסימלי של הקטע AB **הוא** $1+\frac{1}{2e}$ **, ולכן** $AB(-1)=1+\frac{1}{2e}$ **.**

$$AB(-1)=1+\frac{1}{2e}$$

$$f(-1)-f'(-1)=1+\frac{1}{2e}$$

$$f'(-1)=-1\cdot e^{-(-1)^2}=e^{-1}=-\frac{1}{e}$$

$$f(-1)=-\frac{1}{e}+1+\frac{1}{2e}$$

$$\boxed{f(-1)=1-\frac{1}{2e}}$$

נמצא את הפונקציה הקדומה של $f'(x)=xe^{-x^2}$ **, כלומר את** $f(x)$ **, בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.**

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$

$$f(x)=\int xe^{-x^2}\,dx$$

$$f(x)=\int -\frac{1}{2}e^{-x^2}\cdot(-2x)\,dx$$

$$f(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$$

$$1-\frac{1}{2e}=-\frac{1}{2}e^{-(-1)^2}+c \quad \leftarrow f(-1)=1-\frac{1}{2e}$$

$$1-\frac{1}{2e}=-\frac{1}{2e}+c$$

$$\boxed{1=c}$$

$$\boxed{f(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+1}$$

תשובה: $f(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+1$ **.**