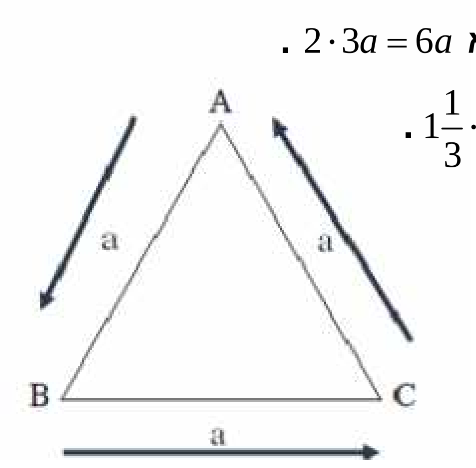
א. נסמן ב- x (מטר לשנייה, מ"ש) את מהירותו של רוכב ב.

מכאן ש- $x+2$ (מטר לשנייה, מ"ש) היא מהירותו של רוכב א.

רוכב א השלים שתי הקפות של המסלול , ולכן המרחק שעבר הוא $2\cdot 3a=6a$.



רוכב ב השלים הקפה ושליש , ולכן המרחק שעבר הוא $1\frac{1}{3}\cdot 3a=4a$.

זמני הרכיבה של רוכב א ושל רוכב ב,

עד שהגיעו ל- A ול- B בהתאמה בפעם השנייה, היו זהים,

והמשוואה המתאימה היא $\frac{6a}{x+2}=\frac{4a}{x}$

$$\frac{6a}{x+2}=\frac{4a}{x} \quad /:2a>0$$

$$3x=2(x+2)$$

$$3x=2x+4$$

$$\boxed{x=4} \quad \rightarrow \boxed{x+2=6}$$

תשובה: מהירותו של רוכב א הייתה 6 מ"ש, ומהירותו של רוכב ב הייתה 4 מ"ש.

ב. רוכב א השלים חמש הקפות של המסלול , ולכן המרחק שעבר הוא $5\cdot 3a=15a$.

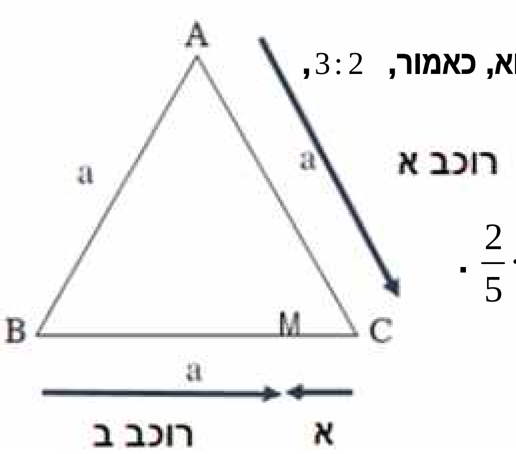
היחס בין מהירותו של רוכב א למהירותו של רוכב ב הוא $6:4=3:2$,

ולכן זהו גם יחס המרחקים (כאשר זמני הרכיבה שווים), ומכאן שרוכב ב עבר $15a\cdot\frac{2}{3}=10a$,

והוא עשה שלוש הקפות ושליש, והגיע לנקודה B .

תשובה: רוכב ב יהיה בנקודה B שעל המשולש.

ג. הרוכבים רוכבים עתה בכיוונים מנוגדים.



יחס המהירויות בין רוכב א לבין רוכב ב שווה ליחס המרחקים והוא, כאמור, $3:2$,

ולכן עד לפגישה יעבור רוכב א מרחק גדול יותר,

ומכאן שהנקודה M נמצאת על הצלע BC .

רוכב ב יעבור שתי חמישיות מהמרחק שירכבו ביחד: $\frac{2}{5}\cdot 2a=\frac{4}{5}a$.

תשובה: הנקודה M נמצאת על הצלע BC,

ומחלקת את הצלע ביחס $BM:MC=4:1$.

ד. למחרת חזרו הרוכבים לרכב נגד כיוון השעון,

כאשר רוכב ב חלף על פני רוכב א בפעם הראשונה לאחר 6 דקות, כלומר לאחר 360 שניות.

הפרש המרחקים שעברו הרוכבים שווה להיקף המשולש.

$$360\cdot 6-360\cdot 4=720 \ .$$

תשובה: היקף המשולש הוא 720 מטר.

א. הסדרה a_n מקיימת את הכלל: $a_{n+1}+a_n=6n+5$ לכל n טבעי.

$$(n=n+1) \quad a_{n+2}+a_{n+1}=6(n+1)+5$$
$$a_{n+2}+a_{n+1}=6n+11$$

ואם נפחית ממשוואה זו את המשוואה הנתונה, נקבל: $a_{n+2}-a_n=6$.

המשמעות היא שסדרת האיברים במקומות האי-זוגיים, או במקומות הזוגיים, היא חשבונית שהפרשה 6 .

תשובה: הוכחנו ש: $a_{n+2}=a_n+6$, כאשר $c=6$.

ב. תשובה: לדוגמה: $1, 2, 7, 8 ,13, 14...$.

ג. נתון כי הסדרה a_n כולה היא חשבונית.

לכן, ההפרש בין איברי הסדרה כולה, יהיה חצי מההפרש של הסדרות החשבוניות במקומות הזוגיים, או האי-זוגיים. כלומר ההפרש של הסדרה כולה הוא $3=6:2$.

$$a_{n+1}+a_n=6n+5$$
$$a_2+a_1=6\cdot 1+5$$
$$a_1+3+a_1=11$$
$$\boxed{a_1=4}$$

תשובה: $a_1=4$.

ד. בנו סדרה חדשה בה $2n+1$ איברים, ולכן האיבר האמצעי בה הוא a_{n+1} (n איברים לפניו ולאחריו).

בסדרה זו האיבר הכללי הוא a_n-n , כאשר a_n הוא איבר בסדרה המקורית.

$$a_{n+1}=43$$
$$a_{n+1}-(n+1)=43$$
$$4+3(n+1-1)-n-1=43$$
$$2n=40$$
$$\boxed{2n+1=41}$$

כלומר, בסדרה החדשה 41 איברים.

סכום של סדרה חשבונית, שבה מספר אי-זוגי של איברים,

הוא מכפלת האיבר האמצעי במספר איברי הסדרה.

(הסבר: $S_{2n+1}=....+a_{n+1}-2d+a_{n+1}-d+a_{n+1}+a_{n+1}+d+a_{n+1}+2d+...=(2n+1)a_{n+1}$.)

$S_{41}=43\cdot 41=1{,}763$ **.**

תשובה: סכום הסדרה החדשה הוא $1{,}763$.

א. נסמן x **- מספר הכדורים הכחולים שרשומה עליהם הספרה** 0**,**

ובהתאם $4x$ **הוא מספר הכדורים האדומים שרשומה עליהם הספרה** 1**.**

נציב את כל הנתונים בטבלה מתאימה.

	B- **צבע כחול**	R **- צבע אדום**	Y **צבע צהוב**	
One **- הספרה** 1		$4x$		28
Zero **- הספרה** 0	x	$20-4x$	1	12
		20	8	40

המשוואה המתאימה היא $20-4x+x+1=12$ **ומכאן ש-** $9=3x$ **ו-** $x=3$**.**

נשלים את כל הטבלה.

	B **- צבע כחול**	R **- צבע אדום**	Y **- צבע צהוב**	
One **- הספרה** 1	9	12	7	28
Zero **- הספרה** 0	3	8	1	12
	12	20	8	40

תשובה: ההסתברות שדני הוציא כדור כחול שרשומה עליו הספרה 1 **היא** $\frac{9}{40}$**.**

ב. ידוע שדני הוציא כדור כחול <u>או</u> כדור שרשומה עליו הספרה 1**.**

נחשב את ההסתברות שדני הוציא כדור שרשומה עליו הספרה 0**.**

$$p(\text{Zero}/(\text{B}\cup\text{One}))=\frac{\text{N}(\text{Zero}\cap(\text{B}\cup\text{One}))}{\text{N}(\text{B}\cup\text{One})}=\frac{3}{9+3+12+7}=\frac{3}{31}.$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{3}{31}$**.**

ג. דני יצבור 5 **נקודות אחרי** 6 **פעמים <u>בדיוק</u> אם יצבור** 4 **נקודות ב-** 5 **הפעמים הראשונות,**

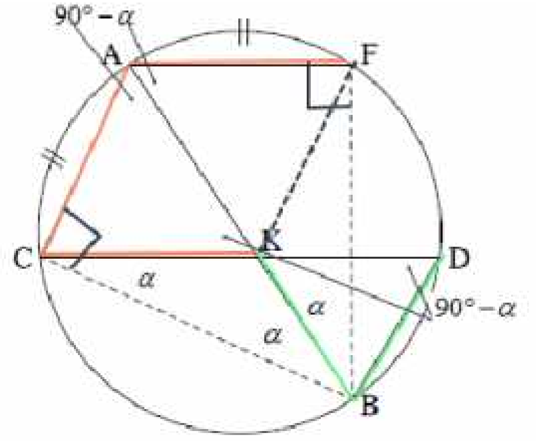
ויוסיף נקודה בפעם השישית.

בחמש הפעמים הראשונות מדובר בהתפלגות בינומית, כאשר $n=5$ **,** $p(\text{One})=\frac{28}{40}=0.7$ **,** $k=4$ **.**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$p(5\text{ points }\textit{in exectly } 6 \textit{ rounds})=\text{P}_5(4)\cdot\ \text{P}_1(1)=\binom{5}{4}\cdot 0.7^4\cdot 0.3^1\ \cdot 0.7=5\cdot 0.7^4\cdot 0.3^1\ \cdot 0.7=0.252105$$

תשובה: ההסתברות היא 0.252105 **.**



בגרות עט יולי 19 מועד קיץ ב שאי

נתונים .1 AB קוטר במעגל .2 $AF \parallel CD$ .3 $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{AF}$.

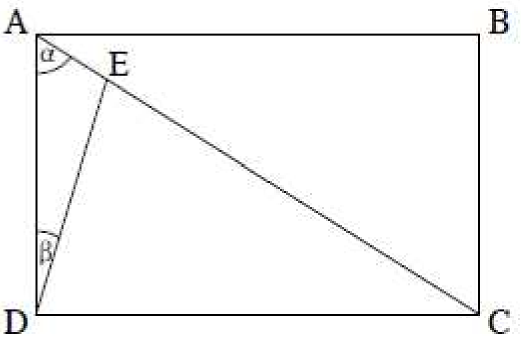
עבור ג. .4 $BD \cdot AB = CD \cdot AC$.

צ"ל: א. (1) $\sphericalangle FAB = \sphericalangle CAB$ (2) $BK = BD$ **ב.** $AFKC$ מעוין

ג. (1) $\Delta BDC \sim \Delta CAB$ (2) CD קוטר במעגל

הסבר		טענה	נימוק
3	5	$\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{AF}$	
5	6	$\sphericalangle FBA = \sphericalangle CBA = \sim$	על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות
1	7	AB קוטר במעגל	נתון
7	8	$\sphericalangle ACB = \sphericalangle AFB = 90°$	על קוטר נשענת זווית היקפית ישרה
8 ,6	9	$\sphericalangle FAB = \sphericalangle CAB = 90° - \sim$	
מ.ש.ל. א (1)			
2	10	$AF \parallel CD$	
10 ,9	11	$\sphericalangle DKB = \sphericalangle FAK = 90° - \sim$	זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים
9	12	$\sphericalangle CDB = \sphericalangle CAB = 90° - \sim$	על קשת משותפת נשענות זוויות היקפיות שוות
12 ,11	13	$\sphericalangle DKB = \sphericalangle CDB$	
13	14	$BK = BD$	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔBKD
מ.ש.ל. א (2)			
10 ,9	15	$\sphericalangle AKC = \sphericalangle FAK = 90° - \sim$	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים
15 ,12	16	$\sphericalangle CAB = \sphericalangle AKC$	זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים
16	17	$AC = CK$	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔACK
5	18	$AC = AF$	על קשתות שוות נשענים מיתרים שווים
18 ,17	19	$AF = CK$	
19 ,10	20	$AFKC$ מקבילית	זוג צלעות נגדיות שווה ומקביל
20 ,18	21	$AFKC$ מעוין	מקבילית עם צלעות סמוכות שוות
מ.ש.ל. ב			
4	22	$BD \cdot AB = CD \cdot AC$	
22	23	$\frac{BD}{CD} = \frac{AC}{AB}$	
23 ,12	24	$\Delta BDC \sim \Delta CAB$	משפט דמיון צלע זווית צלע
מ.ש.ל. ג (1)			
24 ,8	25	$\sphericalangle CBD = \sphericalangle BAC = 90°$	זוויות מתאימות שוות במשולשים דומים
25	26	CD קוטר במעגל	הזווית ההיקפית, שנשענת עליו, היא ישרה
מ.ש.ל. ג (2)			

א. ΔACD **ישר זווית , ולכן** $AC = 2R_1$ **קוטר המעגל החוסם משולש זה, ואת המלבן** $ABCD$.



$\underline{\Delta ADC}$

$$\cos\sim = \frac{AD}{AC}$$

$$\boxed{2R_1\cos\sim = AD}$$

$\underline{\Delta ADE}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{AD}{\sin(180° - (\sim +\ \ ))} = 2R_2$$

$$\frac{2R_1\cos\sim}{\sin(\sim +\ \ )} = 2R_2$$

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin(\sim +\ \ )}{\cos\sim}}$$

תשובה: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin(\sim +\ \ )}{\cos\sim}$.

ב. נתון: $\ \ = \sim$.

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin 2\sim}{\cos\sim}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{2\sin\sim\cos\sim}{\cos\sim}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 2\sin\sim$$

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} < 2} \leftarrow 0° < \sim < 90°,\ 0 < \sin\sim < 1$$

ג. נתון כי $\sim = 60°$, $=15°$.

(1) $\sphericalangle EDC = 90° - 15° = 75°$ (**הפרש זוויות**).

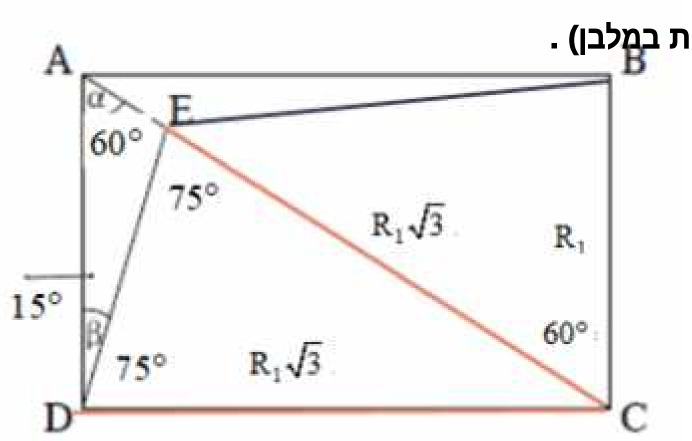
$\sphericalangle DEC = 15° + 60° = 75°$ (**זווית חיצונית ל-** ΔADE).

ΔDEC **שווה שוקיים,** $DC = EC$ (**מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות** ΔDEC).

תשובה: הוכחנו.

(2) $\sphericalangle BCE = \sphericalangle CAD = 60°$ (**זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים**).

$BC = AD = 2R_1 \cos 60° = R_1$ (**צלעות נגדיות שוות במלבן**) .



<u>ΔADC</u>

$$\sin 60° = \frac{DC}{AC}$$

$$2R_1 \sin 60° = DC$$

$$\boxed{DC = R_1\sqrt{3}}$$

$EC = DC = R_1\sqrt{3}$ (**שוקיים שוות במש"ש**)

<u>ΔBEC</u> **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(BE)^2 = (EC)^2 + (BC)^2 - 2EC \cdot BC \cdot \cos\sphericalangle BCE$$

$$(BE)^2 = (R_1\sqrt{3})^2 + {R_1}^2 - 2 \cdot R_1\sqrt{3} \cdot R_1 \cdot \cos 60°$$

$$(BE)^2 = 3{R_1}^2 + {R_1}^2 - {R_1}^2\sqrt{3}$$

$$\boxed{(BE)^2 = (4-\sqrt{3})\,{R_1}^2}$$

תשובה: $(BE)^2 = (4-\sqrt{3})\,{R_1}^2$.

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=a\cos 2x+\sin^2 x$ **, בתחום** $-® \le x \le ®$ **.**

נבדוק את הזוגיות של הפונקציה .

$$f(-x)=a\cos(-2x)+\sin^2(-x)$$
$$f(-x)=a\cos 2x+(-\sin x)^2$$
$$f(-x)=a\cos 2x+\sin^2 x$$
$$f(-x)=f(x)$$

תשובה: $f(x)$ **זוגית (סימטרית לציר ה-** y **) .**

ב. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, שנתון שאינה קבועה, ונקבע את סוגן.

תחילה נמצא את נקודות הקצה, שתהיינה גם נקודות קיצון.

$f(®)=a\cos 2®+\sin^2 ®=a \quad \to (®,a)$ **, ועקב הזוגיות של הפונקציה גם** $(-®,a)$ **.**

$$f'(x)=2a\sin 2x+2\sin x\cos x$$
$$f'(x)=-2a\sin 2x+\sin 2x$$
$$\boxed{f'(x)=\sin 2x(-2a+1)}$$
$$\sin 2x=0$$
$$2x=®k$$
$$\boxed{x=\frac{®k}{2}}$$

ונקבל את $(®,a)$, $(\frac{®}{2},1-a)$, $(0,a)$ **, וגם עקב הזוגיות את** $(-\frac{®}{2},1-a)$, $(-®,a)$ **.**

נשים לב שהביטוי $(-2a+1)$ **מתאפס עבור** $a=0.5$ **,**

ולכן כאשר $a=0.5$ **, הנגזרת שווה לאפס תמיד, והפונקציה קבועה בניגוד לנתון (הסבר גם לסעיף ג).**

הביטוי $(-2a+1)$ **הוא של פונקציה קווית יורדת, העוברת מחיוביות לשליליות, כאשר** $a=0.5$ **.**

נקבע את סוג נקודות הקיצון הפנימיות, בעזרת הנגזרת השנייה.

$$\boxed{f''(x)=2\cos 2x(-2a+1)}$$

$a<0.5$	$a>0.5$
$f''(\frac{®}{2})=\cos(2\cdot\frac{®}{2})\cdot(+)=(-)\cdot(+)<0$	$f''(\frac{®}{2})=\cos(2\cdot\frac{®}{2})\cdot(+)=(-)\cdot(-)>0$
ולכן $(\frac{®}{2},1-a)$ **נקודת מקסימום,**	**ולכן** $(\frac{®}{2},1-a)$ **נקודת מינימום,**
ועקב הזוגיות גם $(-\frac{®}{2},1-a)$ **מקסימום,**	**ועקב הזוגיות גם** $(-\frac{®}{2},1-a)$ **מינימום,**
ומכאן שנקודות הקצה $(-®,a)$, $(®,a)$ **הן מינימום.**	**ומכאן שנקודות הקצה** $(-®,a)$, $(®,a)$ **הן מקסימום.**
$f''(0)=-2\cos(2\cdot 0)\cdot(+)=(-)\cdot(+)<0$	$f''(0)=2\cos(2\cdot 0)\cdot(+)=(+)\cdot(-)<0$
ולכן $(0,a)$ **נקודת מינימום.**	**ולכן** $(0,a)$ **נקודת מקסימום.**

דרך חלופית, להוכחת סוג הקיצון, היא באמצעות השתנות ערכי ה- y .

אם a $1-a>a$ אז $a<\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $-2a>1$, ומכאן ניתן להסיק את סוגן של נקודות הקיצון.

עבור $a<\frac{1}{2}$ נקבל ש- $f(\frac{®}{2})>f(0)=f(®)$, ו- $f(-\frac{®}{2})>f(0)=f(-®)$.

עבור $a>\frac{1}{2}$ נקבל ש- $f(\frac{®}{2})<f(0)=f(®)$, ו- $f(-\frac{®}{2})<f(0)=f(-®)$.

תשובה: עבור $a<\frac{1}{2}$: $(®,a)$ מינימום, $(\frac{®}{2},1-a)$ מקסימום, $(0,a)$ מינימום,

$(-\frac{®}{2},1-a)$ מקסימום, $(-®,a)$ מינימום.

עבור $a>\frac{1}{2}$: $(®,a)$ מקסימום, $(\frac{®}{2},1-a)$ מינימום, $(0,a)$ מקסימום,

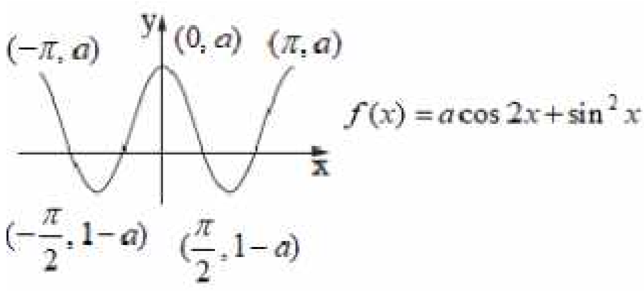
$(-\frac{®}{2},1-a)$ מינימום, $(-®,a)$ מקסימום.

ג. תשובה: עבור $a=\frac{1}{2}$ הפונקציה קבועה (הסבר ניתן בסעיף ב).

ד. נתון $a>1$.

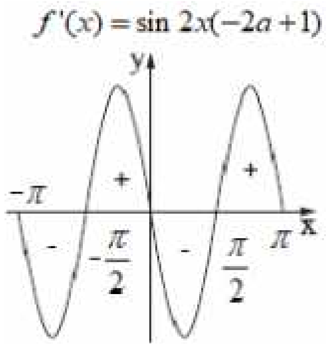
(1) נסרטט את $f(x)$ לפי סוגי נקודות הקיצון, כאשר $a>\frac{1}{2}$,

ונשים לב ש- $1-a<0$, ולכן נקודות המינימום מתחת לציר ה- x .



(2) נסרטט את $f'(x)$ לפי סוגי נקודות הקיצון, כאשר $a>\frac{1}{2}$.

- **נשים לב שהנגזרת התאפסה גם בקצוות.**
- **כאשר הפונקציה עולה, הנגזרת חיובית.**
- **כאשר הפונקציה יורדת, הנגזרת שלילית.**
- **ניתן "לחוש" של- $f(x)$ ארבע נקודות פיתול, ובהתאם ארבע נקודות קיצון ל- $f'(x)$.**
- **$f'(x)=\sin 2x(-2a+1)$ פונקציה אי-זוגית.**



ה. לפונקציה, האי-זוגית, $\sin 2x$ מחזוריות של $\frac{®}{2}k$,

לכן ארבעת השטחים שווים, וגודל כ"א מהם שווה ל- $12:4=3$.

$$\int_{\frac{®}{2}}^{®}(f'(x)-0)dx=f(x)\Big]_{\frac{®}{2}}^{®}$$

$$f(®)-f(\frac{®}{2})=3$$

$$a-(1-a)=3$$

$$a-1+a=3$$

$$2a=4$$

$$\boxed{a=2}$$

ניתן גם לחשב את שני השטחים מימין, וסכומם שווה ל- $12:2=6$ - עקב אי הזוגיות של פונקציית הנגזרת.

תשובה: $a=2$.

הפונקציה שיש להביא למקסימום היא שטח המשולש ACD .

כיוון שהקוטר AB מאונך למיתר CD, הרי שהוא גם חוצה את המיתר,

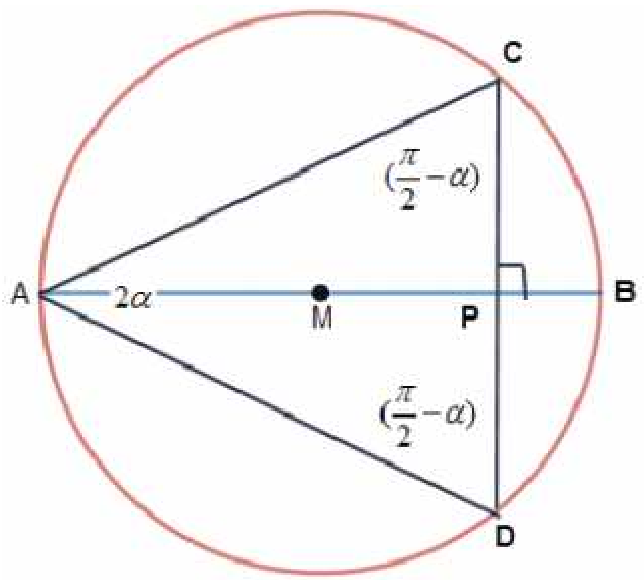
ומכאן שבמשולש ACD הגובה מתלכד עם התיכון והמשולש הוא שווה שוקיים.

נפתור את התרגיל בשתי דרכים.

<u>פתרון טריגונומטרי עם פונקציה טריגונומטרית</u>

נסמן $\sphericalangle DAC = 2\alpha$ **, כאשר** $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ **, כי אם** $\frac{\pi}{2} \le 2\alpha < \pi$ **אז הנקודה P הייתה מהמרכז לכיוון הנקודה A .**

מכאן שכל אחת מזוויות הבסיס, השוות זו לזו, היא $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ **.**



$$S_{\Delta ACD} = 2\cdot 10^2 \sin 2\alpha \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

$$S_{\Delta ACD} = 200\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\alpha$$

$$\boxed{S_{\Delta ACD} = 400\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha}$$

$$(S_{\Delta ACD})' = 400\left[\cos\alpha\cdot\cos^3\alpha + \sin\alpha\cdot(-3\cos^2\alpha\sin\alpha)\right]$$

$$(S_{\Delta ACD})' = 400(\cos^4\alpha - 3\sin\alpha\cos^2\alpha\sin\alpha)$$

$$(S_{\Delta ACD})' = 400\cos^2\alpha(\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha = 0 \quad \alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$$

$$-3\sin^2\alpha = -\cos^2\alpha \quad /:3\cos^2\alpha > 0$$

$$\tan^2\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\tan\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = \pm\frac{\pi}{6}+\pi k$$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ **פתרון יחידי בתחום.**

$$\left.\begin{matrix}(S_{\Delta ACD})'(\frac{\pi}{7}) = 80 > 0 \\ (S_{\Delta ACD})'(\frac{\pi}{5}) = -100 < 0\end{matrix}\right\} \alpha = \frac{\pi}{6}, \max$$

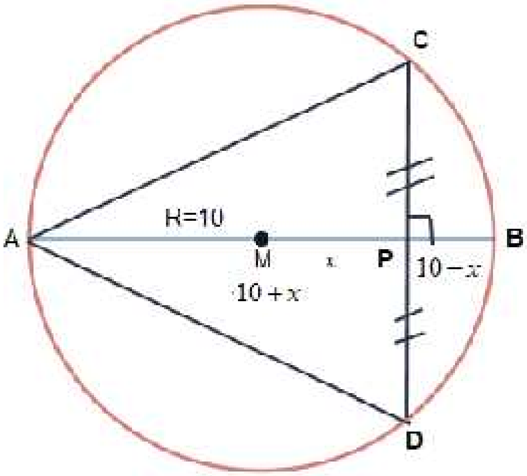
השטח המקסימלי הוא: $S_{\Delta ACD}(\frac{\pi}{6}) = 400\sin(\frac{\pi}{6})\cdot\cos^3(\frac{\pi}{6}) = 75\sqrt{3}$

תשובה: השטח המקסימלי של משולש ACD הוא $75\sqrt{3}$.

<u>פתרון גיאומטרי עם פונקציית שורש</u>

נסמן $MP = x$ **, ולכן** $AP = 10 + x$ **,** $BP = 10 - x$ **.**

שני מיתרים נחתכים במעגל, כך שמכפלת הקטעים הנוצרים שווה:



$$AP \cdot BP = CP \cdot DP$$
$$(10 + x)(10 - x) = (CP)^2$$
$$CP = \sqrt{100 - x^2}$$
$$\boxed{CD = 2\sqrt{100 - x^2}}$$

$$S_{\Delta ACD} = \frac{(10 + x) \cdot \cancel{2}\sqrt{100 - x^2}}{\cancel{2}}$$
$$(S_{\Delta ACD})' = \sqrt{100 - x^2} + \frac{(10 + x) \cdot (-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\sqrt{100 - x^2}}$$
$$(S_{\Delta ACD})' = \frac{100 - x^2 - 10x - x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$
$$\boxed{(S_{\Delta ACD})' = \frac{-2x^2 - 10x + 100}{\sqrt{100 - x^2}}}$$
$$-2x^2 - 10x + 100 = 0$$
$$\boxed{x = 5} \quad o.k. \quad 0 < x < 10$$
$$x = -10 \quad false$$

מכנה הנגזרת חיובי. הטרינום הריבועי במונה הוא של פרבולה הפוכה, בעלת מקסימום ("בוכה"), העוברת מחיוביות לשליליות עבור $x = 5$ **, ולכן הפונקציה עוברת מעלייה לירידה, וזהו מקסימום.**

השטח המקסימלי הוא: $S_{\Delta ACD}(5) = (10 + 5)\sqrt{100 - 5^2} = 75\sqrt{3}$

תשובה: השטח המקסימלי של משולש ACD **הוא** $75\sqrt{3}$**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+bx-c}{x^2-4}$ **,** c,b **פרמטרים.**

מכנה מתאפס עבור $x=\pm2$**, ולכן** $x\neq\pm2$ **הוא תחום ההגדרה.**

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x\neq\pm2$**.**

ב. נתון כי הפונקציה $f(x)$ **היא זוגית, כלומר** $f(x)=f(-x)$ **.**

כיוון שכל החזקות של x **זוגיות, למעט פעם אחת (**bx**) הרי ש-** $b=0$**.**

ובאופן קצת יותר מסודר:

$$f(-x)=f(x)$$

$$\frac{(-x)^2+b(-x)-c}{(-x)^2-4}=\frac{x^2+bx-c}{x^2-4}$$

$$\frac{x^2-bx-c}{x^2-4}=\frac{x^2+bx-c}{x^2-4}$$

$$x^2-bx-c=x^2+bx-c$$

$$-2bx=0$$

$$\boxed{b=0}$$

תשובה: $b=0$ **.**

ג. נציב $b=0$ **ונקבל** $f(x)=\frac{x^2-c}{x^2-4}$ **.**

נתון כי לגרף הפונקציה $f(x)$ **יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה-** x **, בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.**

תחום ההגדרה הוא $x\neq\pm2$**, כעשר מספרים אלו אינם מאפסים את המונה,**

ולכן הישרים $x=2$ **ו-** $x=-2$ **הם האסימפטוטות האנכיות לגרף הפונקציה,**

ושתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x **הן בין** $x=2$ **ל-** $x=-2$**.**

$$f(x)=0 \quad \to x^2-c=0 \quad \to x=\pm\sqrt{c} \quad \to c>0$$

$$-2<\pm\sqrt{c}<2$$

$$\sqrt{c}<2 \quad \to c<4 \quad \to \boxed{0<c<4}$$

תשובה: $0<c<4$**.**

ד. (1) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-c}{x^2-4}$, ונקבע את סוגה.

כיוון שהפונקציה זוגית, והמשמעות היא שהגרף סימטרי לציר ה- y ,

הרי שבהכרח נקודת הקיצון תהייה על ציר זה !!!

יחד עם זאת, נגזור (מה שבטוח).

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-2x(x^2-c)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4-x^2+c)}{(x^2-4)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2(c-4)x}{(x^2-4)^2}}$$

$$x=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,\frac{c}{4})}$$

הביטוי $c-4$ הוא שלילי, כיוון ש- $0<c<4$.

שהמונה של הנגזרת הוא פונקציה קווית יורדת, שעוברת מחיוביות לשליליות, עבור $x=0$.

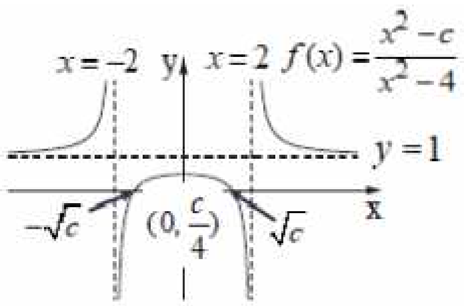
ולכן, הפונקציה עוברת מעלייה לירידה, ו- $(0,\frac{c}{4})$ היא נקודת מקסימום.

תשובה: $(0,\frac{c}{4})$ מקסימום.

(2) חזקות המונה והמכנה שוות זו לזו (פולינום ריבועי), לכן הגבול של ערכי הפונקציה הוא מנת המקדמים.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-c}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{c}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-0}{1-0}=1$$

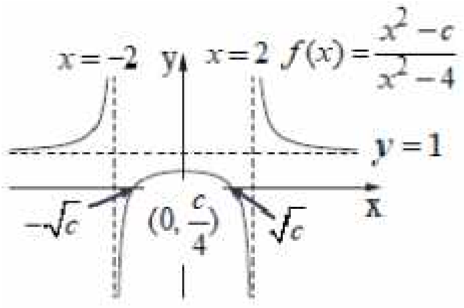
, והאסימפטוטה האופקית היא $y=1$.

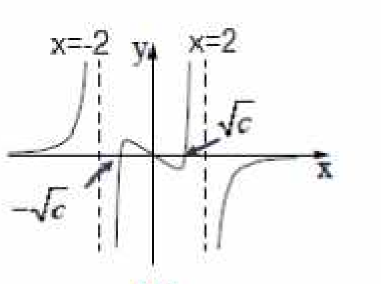


תשובה: האסימפטוטה אופקית היא $y=1$, הסקיצה הובאה גם .

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$, המוגדרת בתחום של הפונקציה הנתונה והנגזרת שלה.

ניעזר בסקיצה של $f(x)$ על-מנת לבחור את הגרף המתאים, מבין השלושה הנתונים.

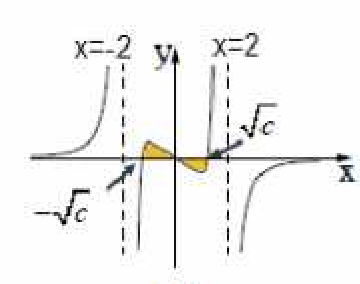




III

(1) שיקולים לבחירת הגרף המתאים

- $f(x)$ **חיובית, כאשר הגרף מעל לציר ה-** x **, עבור:** $x>2$ **, או** $-\sqrt{c}<x<\sqrt{c}$ **, או** $x<-2$
- $f(x)$ **שלילית, כאשר הגרף מתחת לציר ה-** x **, עבור:** $\sqrt{c}<x<2$ **, או** $-2<x<-\sqrt{c}$
- $f'(x)$ **חיובית, כאשר הגרף שלה עולה , כלומר עבור:** $-2<x<0$ **, או** $x<-2$
- $f'(x)$ **שלילית, כאשר הגרף שלה יורד , כלומר עבור:** $x>2$ **, או** $0<x<2$
- $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ **תהייה חיובית, כאשר** $f(x)$ **ו-** $f'(x)$ **חיוביות, או כאשר שתיהן שליליות.**
- $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ **תהייה שלילית, כאשר** $f(x)$ **ו-** $f'(x)$ **בסימנים מנוגדים.**
- **<u>ולבחירה המתאימה</u>**
  - **כבר עבור** $x>2$ **ניתן לראות שגרף** I **ו-** II **נפסלים כי** $f(x)$ **חיובית ויורדת,**
    ולכן $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ **שלילית – מתאים רק לגרף** III **.**
  - **עבור** $\sqrt{c}<x<2$ **:** $f(x)$ **שלילית ויורדת, ולכן** $g(x)$ **חיובית –מתאים לגרף** III **.**
  - **עבור** $0<x<\sqrt{c}$ **:** $f(x)$ **חיובית ויורדת, ולכן** $g(x)$ **שלילית –מתאים לגרף** III **.**
  - **עבור** $-\sqrt{c}<x<0$ **:** $f(x)$ **חיובית ועולה, ולכן** $g(x)$ **חיובית**
  - **עבור** $-2<x<-\sqrt{c}$ **:** $f(x)$ **שלילית ועולה, ולכן** $g(x)$ **שלילית**
  - **עבור** $x<-2$ **:** $f(x)$ **חיובית ועולה, ולכן** $g(x)$ **חיובית**



III

תשובה: גרף III **הוא גרף הפונקציה** $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ **.**

(2) $g(-x)=f(-x)\cdot f'(-x)=f(x)(-f'(x))=-f(x)\cdot f'(x)=-g(x)$

ולכן $g(x)$ **פונקציה אי-זוגית ושני השטחים המסומנים שווים זה לזה.**

$$S=2\cdot\int_{-\sqrt{c}}^{0}[g(x)-0]dx=2\cdot\int_{-\sqrt{c}}^{0}[f(x)f'(x)]dx=2\cdot\frac{f^2(x)}{2}\Big]_{-\sqrt{c}}^{0}=$$

$$=f^2(0)-f^2(-\sqrt{c})=(-\frac{c}{4})^2-(0)^2=\boxed{\frac{c^2}{16}}$$

תשובה: השטח הוא $\frac{c^2}{16}$**.**