א. נתונה סדרה חשבונית, שבה $a_1 = 3$, $d = 5$.

בסדרה $2n$ איברים.

נוכיח שסדרת האיברים במקומות האי-זוגיים, וגם סדרת האיברים במקומות הזוגיים, היא חשבונית, ונמצא את ההפרש שלה.

$$a_{n+2} - a_n = a_n + 2d - a_n$$
$$a_{n+2} - a_n = 2d$$

לכן שתי סדרות אלו חשבוניות, כי ההפרש קבוע (אינו תלוי ב- n)

הפרש הסדרות הוא $2d = 2 \cdot 5 = 10$

נארגן את הנתונים בטבלה מתאימה.

	מקומות אי-זוגיים	מקומות זוגיים
a_1	$a_1 = 3$	$a_2 = a_1 + d = 3 + 5 = 8$
d	$2d = 10$	$2d = 10$
n	$\frac{2n}{2} = n$	$\frac{2n}{2} = n$

נציב את נתוני הטור הראשון בנוסחת הסכום $S_n = \frac{n\left[2a_1 + d(n-1)\right]}{2}$

$$S_n = \frac{n\left[2 \cdot 3 + 10(n-1)\right]}{2}$$
$$S_n = \frac{n\left[6 + 10(n-1)\right]}{2}$$
$$S_n = n\left[3 + 5(n-1)\right]$$
$$S_n = n(3 + 5n - 5)$$
$$S_n = n(5n - 2)$$
$$\boxed{S_n = 5n^2 - 2n}$$

תשובה: סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים הוא $5n^2 - 2n$.

ב. נציב את נתוני הטור השני בנוסחת הסכום $S_n=\frac{n\left[2a_1+d(n-1)\right]}{2}$ **.**

$$S_n=\frac{n\left[2\cdot 8+10(n-1)\right]}{2}$$
$$S_n=\frac{n\left[16+10(n-1)\right]}{2}$$
$$S_n=n\left[8+5(n-1)\right]$$
$$S_n=n(8+5n-5)$$
$$S_n=n(5n+3)$$
$$\boxed{S_n=5n^2+3n}$$

תשובה: סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים הוא $5n^2+3n$ **.**

ג. נתון $a_{2n-1}=193$ **.**

נשתמש בנוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית:

$$a_n=a_1+(n-1)d$$
$$a_1+(2\text{n}-1-1)d=193$$
$$3+(2n-2)\cdot 5=193$$
$$5(2n-2)=190$$
$$2n-2=38$$
$$2n=40$$
$$n=20$$

(בסדרה 40 **איברים.)**

נציב $n=20$ **בביטוי הסכום שקיבלנו בסעיף ב.**

$$5\cdot 20^2+3\cdot 20=2060$$

תשובה: סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים הוא 2060 **.**

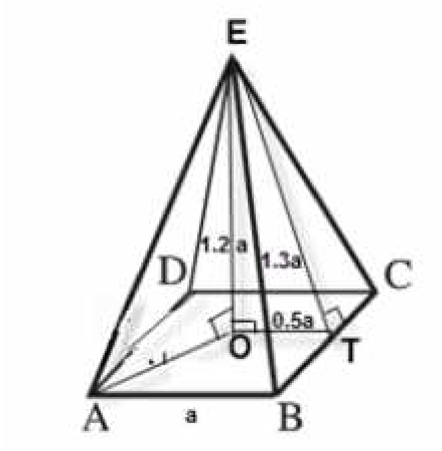
א. בסיס הפירמידה ABCDE **הוא ריבוע, שאורך צלעו** a**.**

$ET=1.3a$ **- הגובה לצלע** BC **בפאה הצדדית** EBC**.**

OT **קטע אמצעים ב-** ΔABC **ולכן** $OT=0.5a$ **.**

OE **הוא גובה הפירמידה ולכן** $\sphericalangle EOT=\sphericalangle EOA=90^\circ$ **.**

על פי משפט פיתגורס, ב- ΔEOT**:**



$$(EO)^2+(OT)^2=(ET)^2$$
$$(EO)^2+(0.5a)^2=(1.3a)^2$$
$$(EO)^2+0.25a^2=1.69a^2$$
$$(EO)^2=1.44a^2$$
$$\boxed{EO=1.2a} \quad \leftarrow 0<EO<1.3a$$

תשובה: גובה הפירמידה הוא $1.2a$ **.**

ב. נתון כי נפח הפירמידה הוא 400 **סמ"ק.**

$$V=\frac{(AB)^2\cdot EO}{3}$$
$$400=\frac{a^2\cdot 1.2a}{3}$$
$$400=0.4a^3$$
$$1000=a^3$$
$$a=\sqrt[3]{1000}$$
$$\boxed{a=10cm}$$

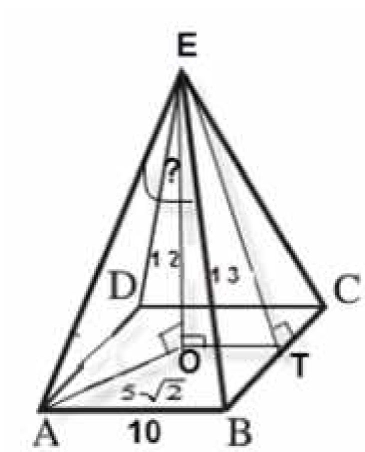
תשובה: 10 **ס"מ** $=a$**.**

ג. על פי משפט פיתגורס, ב- ΔABC **,** $10\sqrt{2}$ **ס"מ** $=AC$ **.**

האלכסונים חוצים זה את זה בריבוע, לכן $5\sqrt{2}$ **ס"מ** $=AO$**.**

עבור 10 **ס"מ** $=a$ **, גובה הפירמידה הוא** 12 **ס"מ** $=EO$**.**

נחשב את הזווית שבין המקצוע הצדדי לגובה הפירמידה, $\sphericalangle AEO$**.**



$\underline{\Delta EAO}$

$$\tan\sphericalangle AEO=\frac{AO}{EO}$$
$$\tan\sphericalangle AEO=\frac{5\sqrt{2}}{12}$$
$$\boxed{\sphericalangle AEO=30.51^\circ}$$

תשובה: הזווית בין המקצוע הצדדי EA **לגובה בפירמידה** SABCD **היא בת** 30.51°**.**

(כמו בין כל מקצוע צדדי אחר לגובה הפירמידה הנתונה.)

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2\cos 2x+10\cos x$ **בתחום** $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3}{2}\pi$ **.**

נמצא, תחילה, את נקודות הקצה - שתהיינה גם נקודות קיצון.

$$f(\frac{\pi}{2})=2\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})+10\cos\frac{\pi}{2}=-2\quad\rightarrow(\frac{\pi}{2},-2)$$
$$f(\frac{3\pi}{2})=2\cos(2\cdot\frac{3\pi}{2})+10\cos\frac{3\pi}{2}=-2\quad\rightarrow(\frac{3\pi}{2},-2)$$

נקודות הקצה: $(\frac{\pi}{2},\ -2)$ **,** $(\frac{3\pi}{2},\ -2)$**.**

$\boxed{f'(x)=-4\sin 2x-10\sin x}$

$-4\sin 2x-10\sin x$

$-8\sin x\cos x-10\sin x=0$

$\sin x(-8\cos x-10)=0$

$\sin x=0 \qquad 8\cos x-10=0\quad\rightarrow\cos x=-1.25\quad\rightarrow\varnothing\quad -1\le\cos x\le 1$

$x=\pi k$

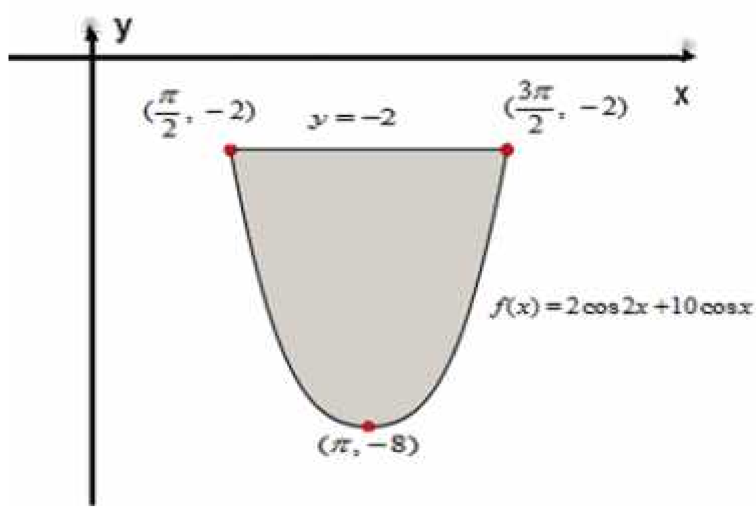
$k=1\quad\rightarrow x=\pi\quad\rightarrow f(\pi)=2\cos(2\cdot\pi)+10\cos\pi=-8\quad\rightarrow(\pi,-8)$

נמצא את שיעורי נקודת המינימום והמקסימום המוחלט, בעזרת ערכי הפונקציה:

x	$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f(x)$	-2		-8		-2
מסקנה	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max

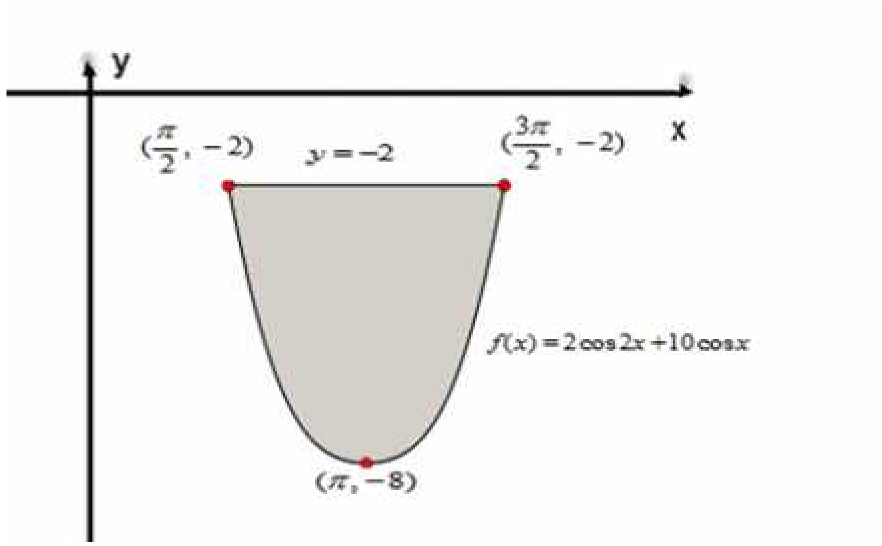
תשובה: $(\pi,-8)$ **מינימום,** $(\frac{\pi}{2},\ -2)$ **,** $(\frac{3\pi}{2},\ -2)$ **מקסימום.**

ב. להלן הסקיצה כולל סימון הישר $y=-2$ **והשטח הנדרש עבור סעיף ג.**



נכתב ע"י עפר ילין

ג. נחשב את גודל השטח (האפור).



הפרש פונקציות:

$$-2-(2\cos 2x+10\cos x)=-2-2\cos 2x-10\cos x$$

$$S=\int_{\frac{3®}{2}}^{\frac{®}{2}}(-2-2\cos 2x-10\cos x)\,dx$$

$$S=(-2x-\frac{2\sin 2x}{2}-10\sin x)\Big]_{\frac{3®}{2}}^{\frac{®}{2}}$$

$$S=(-2\cdot\frac{3®}{2}-\sin 2\cdot\frac{3®}{2}-10\sin\cdot\frac{3®}{2})-(-2\cdot\frac{®}{2}-\sin 2\cdot\frac{®}{2}-10\sin\cdot\frac{®}{2})$$

$$S=(0.5752)-(-13.14)$$

$$\boxed{S=13.717}$$

תשובה: גודל השטח הוא 13.717**.**

א. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{x}-x$

תשובה: תחום ההגדרה כל x **.**

(2) נמצא את נקודת הקיצון של הפונקציה ואת סוגה.

$$\boxed{f'(x)=e^{x}-1}$$

$$e^{x}-1=0$$

$$e^{x}=1$$

$$x=0 \quad \rightarrow y=e^{0}-0=1$$

$$f''(x)=e^{x}>0 \quad \rightarrow (0,1)\ Min$$

תשובה: $(0,1)$ **מינימום.**

(3) הנקודה $(0,1)$ **היא נקודת מינימום, כאשר הפונקציה מוגדרת לכל** x **.**

לכן 1 **הוא הערך המינימלי של הפונקציה ומכאן שהפונקציה חיובית לכל** x **.**

ב. (1) נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{e^{x}-x}=\frac{1}{f(x)}$

כיוון ש- $f(x)$ **חיובית לכל** x **, הרי מכנה הפונקציה** $g(x)$ **חיובי, והפונקציה מוגדרת לכל** x **.**

תשובה: תחום ההגדרה כל x **.**

(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)=\frac{1}{e^{x}-x}=\frac{1}{f(x)}$

$$\boxed{g'(x)=\frac{-f'(x)}{f^{2}(x)}}$$

לכן, הנגזרת $g'(x)$ **מתאפסת כאשר** $f'(x)$ **, כלומר עבור** $x=0$ **.**

אולם, סימן הנגזרת משתנה, ולכן תחומי העלייה והירידה מתהפכים.

תשובה: $x>0$ **ירידה ,** $x<0$ **עלייה.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\ell n(x^2)-x^2+a$ **,** a **פרמטר.**

על פי הגדרת פונקצית ה- ℓn **נקבל** $x^2>0$ **ולכן** $x\neq 0$ **.**

תשובה: $x\neq 0$.

ב. נמצא את שיעור נקודות הקיצון ואת סוגן.

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2}-2x$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2x-2x^3}{x^2}}$$

$$0=2x-2x^3 \quad /:2x\neq 0$$

$$0=1-x^2$$

$$x^2=1$$

$$x=1 \quad \to f(1)=\ell n(1^2)-1^2+a \quad \to \boxed{(1,a-1)}$$

$$x=-1 \quad \to f(-1)=\ell n((-1)^2)-(-1)^2+a \quad \to \boxed{(-1,a-1)}$$

נמצא את סוג הקיצון, באמצעות נגזרת שנייה של המונה,

כאשר מכנה הנגזרת חיובי, והנגזרת הראשונה מתאפסת בנקודות החשודות כקיצון.

$$mone: f''(x)=2-6x^2$$

$$mone: f''(1)=2-6\cdot 1^2<0 \quad \to Max$$

$$mone: f''(-1)=2-6\cdot(-1)^2<0 \quad \to Max$$

תשובה: $(1,a-1)$ **,** $(-1,a-1)$ **מקסימום.**

ג. שיעור ה- y **בנקודות המקסימום (המוחלט) הוא** $a-1$ **.**

עבור $a=1$ **שיעור ה-** y **יהיה** 0 **ונקודות הקיצון יהיו על ציר ה-** x **.**

תשובה: $a=1$**.**