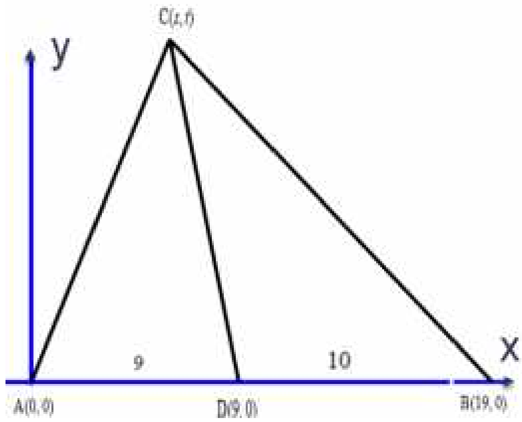
א. נסמן $C(s,t)$ **נקודה על המקום הגיאומטרי, כאשר** $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$**.**

על-פי משפט חוצה זווית ב- ΔABC **מתקיים:** $\frac{DB}{AD} = \frac{CB}{CA}$**.**



$$\frac{10}{9} = \frac{\sqrt{(s-19)^2 + (t-0)^2}}{\sqrt{(s-0)^2 + (t-0)^2}} \quad ()^2$$

$$100s^2 + 100t^2 = 81s^2 - 3078s + 29241 + 81t^2 \quad /:19$$

$$s^2 + 162s + t^2 = 1539$$

$$(s+81)^2 + t^2 = 8100$$

$$\boxed{(x+81)^2 + y^2 = 8100}$$

וזהו מעגל שמרכזו $(-81,0)$ **ורדיוסו** 90 **.**

נשים לב שלא כל נקודות המעגל הן הנקודות C**,**

כי כאשר $C(9,0)$ **, או** $C(-171,0)$ **, לא נוצר** ΔABC**.**

תשובה: המקום הגיאומטרי, שעליו נמצאות הנקודות C **, הוא המעגל** $(x+81)^2 + y^2 = 8100$**.**

ב. הן הצלע AB **, והן מרכז המעגל** $(-81,0)$ **, מונחים על ציר ה-** x**.**

לכן, השטח המקסימלי של ΔABC **יתקבל, כאשר הקדקוד** C **יהיה בדיוק מעל, או מתחת, למרכז המעגל,**

ואורך הגובה יהיה, כאורך הרדיוס, 90 **.**

$$S_{\Delta ABC} = \frac{19 \cdot 90}{2} = 855$$

תשובה: השטח המקסימלי של ΔABC **הוא** 855 **.**

ג. המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה, לכן $m_R \cdot m_{mashik} = -1$ **.**

נסמן $C(x,y)$ **כנקודת ההשקה של המעגל ושל הצלע** BC**.**

$$\frac{y-0}{x-(-81)} \cdot \frac{y-0}{x-19} = -1$$

$$\begin{cases} y^2 = (-x-81)(x-19) \\ (x+81)^2 + y^2 = 8100 \end{cases}$$

$$(x+81)^2 + (-x-81)(x-19) = 8100$$

$$x^2 + 162x + 6561 - x^2 + 19x - 81x + 1539 = 8100$$

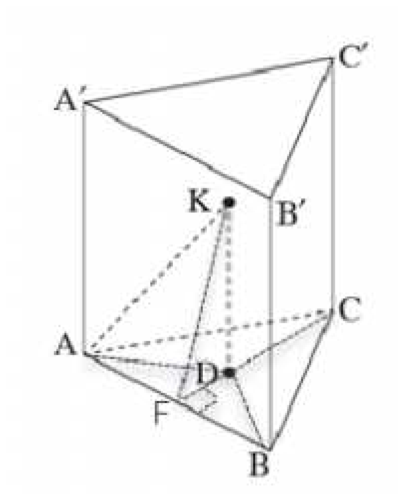
$$100x = 0$$

$$x = 0 \quad \rightarrow y = \pm 9\sqrt{19}$$

תשובה: שתי נקודות ההשקה הן $(0,\ 9\sqrt{19})$ **ו-** $(0,\ -9\sqrt{19})$ **.**

א. $ABCA'B'C'$ **היא מנסרה ישרה , שכל מקצועותיה שווים זה לזה, ואורכם הוא** a **.**

מכאן, שהבסיסים הם משולשים שווי צלעות (שכל זוויותיהם שוות ל- $60°$**), וכל שלוש הפאות הן ריבועים.**



$$4.5V_{ABCK} = V_{ABCA'B'C'}$$

$$\frac{4.5 \cdot S_{\Delta ABC} \cdot DK}{3} = S_{\Delta ABC} \cdot AA'$$

$$1.5ta = a \quad / : 1.5a > 0$$

$$\boxed{t = \frac{2}{3}}$$

תשובה: $t = \frac{2}{3}$**.**

ב. ישר החיתוך בין מישור ABK **למישור הבסיס** ABC **הוא** AB**.**

KF **אנך ממישור** ABK**. כיוון שהפירמידה** $ABCK$ **ישרה,**

אז מקצועותיה שווים זה לזה, ולכן הוא גם תיכון, כלומר $AF = BF$**.**

CF **אנך מהבסיס , שעובר דרך הנקודה** D**, שהיא מרכז המעגל החוסם את הבסיס**

וגם מפגש תיכונים במש"ץ, החותכים זה את זה ביחס המישור $2:1$ **מהקדקוד.**

בהתאם, הזווית המבוקשת היא $\sphericalangle KFD$**, המתקבלת במשולש ישר הזווית** KFD**.**

$\underline{\Delta ABC}$

$$\frac{AB}{\sin 60°} = 2R$$

$$\frac{a}{\sqrt{3}} = R$$

$$\boxed{FD = \frac{a}{2\sqrt{3}}}$$

$\underline{\Delta KFD}$

$$\tan \sphericalangle KFD = \frac{KD}{FD} = \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{a}{2\sqrt{3}}}$$

$$\boxed{\sphericalangle KFD = 66.59°}$$

תשובה: הזווית שבין מישור ABK **למישור** ABC **היא בת** $66.59°$**.**

ג. נתון כי נפח הפירמידה $ABCK$ **הוא** $12\sqrt{3}$ **.**

$$\frac{0.5\,a^2\,\sin 60^\circ \cdot \frac{2}{3}a}{3} = 12\sqrt{3}$$

$$a^3 = 216$$

$$\boxed{a = 6}$$

תשובה: $a = 6$ **.**

ד. (1) $A(0,0,0)$ **,** $C(0,6,0)$ **,** $A'(0,0,6)$ **,**

שיעורי הקדקוד B **אינם שליליים (ניסוח שגוי במקור).**

ניתן למצוא את שיעורי B **במספר דרכים (וקטורים, גיאומטריה , טריגו) - בחרתי בווקטורים.**

נסמן $B(a,b,0)$ **.**

$$\cos\sphericalangle CAB = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\left|(a,b,0)\cdot(0,6,0)\right|}{6\cdot 6}$$

$$18 = 6b$$

$$\boxed{b = 3}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 6$$

$$\sqrt{a^2+3^2+0^2} = 6$$

$$a = 3\sqrt{3}$$

$$B(3\sqrt{3},3,0) \quad \rightarrow B'(3\sqrt{3},3,6)$$

תשובה: $B'(3\sqrt{3},3,6)$ **.**

(2) נמצא את משוואת המישור $AB'K$ **.**

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \bullet \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}((0, 6, 0) + (3\sqrt{3}, 3, 0))$$

$$\overrightarrow{AD} = \underline{x} = (\sqrt{3}, 3, 0) \quad \rightarrow D(\sqrt{3}, 3, 0) \rightarrow K(\sqrt{3}, 3, 4) \quad \leftarrow \frac{2}{3} \bullet 6 = 4$$

$$\overrightarrow{AB'} = \underline{B'} - \underline{A} = \underline{x} = (3\sqrt{3}, 3, 6)$$

$$\overrightarrow{AK} = \underline{K} - \underline{A} = \underline{x} = (\sqrt{3}, 3, 4)$$

מכאן שהצגה פרמטרית של המישור $AB'K$ **היא:** $\underline{x} = t(3\sqrt{3}, 3, 6) + q(\sqrt{3}, 3, 4)$

נמצא את משוואת המישור.

$$\left.\begin{array}{l}(a,b,c)\,(3\sqrt{3}, 3, 6) = 0 \quad \rightarrow 3\sqrt{3}\,a + 3b + 6c = 0 \\ (a,b,c)\,(\sqrt{3}, 3, 4) = 0 \quad \rightarrow \sqrt{3}\,a + 3b + 4c = 0\end{array}\right\} -$$

$$2\sqrt{3}\,a + 2c = 0$$

$$a = 1 \quad \rightarrow c = -\sqrt{3} \quad \rightarrow \sqrt{3} + 3b - 4\sqrt{3} = 0 \quad \rightarrow b = \sqrt{3}$$

המישור $AB'K$ **עובר בראשית, ולכן** $d = 0$ **, ומשוואת המישור היא** $x + \sqrt{3}\,y - \sqrt{3}\,z = 0$ **.**

תשובה: משוואת המישור $AB'K$ **היא** $x + \sqrt{3}\,y - \sqrt{3}\,z = 0$ **.**

א. נפתור את המשוואה הריבועית $z^2+(-5+2i)z+7+i=0$ **.**

$$\Delta=(-5+2i)^2-4(7+i)$$
$$\Delta=25-20i-4-28-4i$$
$$\boxed{\Delta=-7-24i}$$
$$\tan\bar{} =\frac{-24}{-7}=\frac{24}{7}$$
$$\bar{} =73.74°+180°k$$
$$\bar{} =253.74° \quad \leftarrow 180°<\bar{} <270°$$
$$r=\sqrt{(-7)^2+(-24)^2}=25$$
$$\boxed{\Delta=25\,cis253.74°}$$
$$t_i=\sqrt{25}\,cis\frac{253.74+360°k}{2}$$
$$t_1=5\,cis\,126.87°=-3+4i$$
$$t_2=5\,cis\,306.87°=3-4i$$
$$z_{1,2}=\frac{5-2i\pm(-3+4i)}{2}$$
$$z_1=\frac{5-2i-3+4i}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i$$
$$z_2=\frac{5-2i+3-4i}{2}=\frac{8-6i}{2}=4-3i$$

תשובה: פתרונות המשוואה הם: $1+i$ **,** $4-3i$ **.**

ב. $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ **,** $|4-3i|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$ **, ולכן** $w=1+i$ **(קרוב יותר לראשית).**

(1) נתון: $a_m=1$ **,** $a_K=w=1+i$ **- איברים בסדרה חשבונית.**

$$-\begin{cases}a_1+d(k-1)=1+i\\a_1+d(m-1)=1\end{cases}$$
$$d(k-m)=i$$
$$d=\frac{i}{k-m}$$

כיוון ש- k **ו-** m **הם מספרים טבעיים, הרי שהפרש הסדרה הוא מדומה טהור,**
ובהתאם, החלק הממשי של איברי הסדרה לא ישתנה, וכל איברי הסדרה הם מן הצורה $1+b$**.**
תשובה: הוכח.

(2) רדיוס מעגל היחידה הוא כמובן 1, ומרכז מעגל היחידה הוא בראשית הצירים.

$|a_n|=|1+bi|=\sqrt{1^2+b^2}=\sqrt{1+b^2}\geq 1$ **, ולכן רק כאשר** $b=0$ **- איבר הסדרה** $1+0i=1$ **, הממוקם בנקודה** $(1,0)$**, יהיה על מעגל היחידה, ושאר איברי הסדרה, המיוצגים כנקודות במישור גאוס, יהיו מחוץ למעגל היחידה. למעשה, הישר** $x=1+bi$ **משיק למעגל היחידה בנקודה** $(1,0)$ **.**

תשובה: הוכח.

א. נתונות הפונקציה $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

(1) המכנה חיובי לכל x **. (וגם המונה, ולכן הפונקציה חיובית לכל** x)

תשובה: תחום ההגדרה כל x**.**

(2) נמצא את נקודות הקיצון ונקבע את סוגן.

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1-e^x)}{(e^x+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}}$$

מונה הנגזרת , ומכנה הנגזרת, חיוביים לכל x

תשובה: עלייה: כל x **, ירידה: אף** x .

(3) נמצא את שיעורי נקודות הפיתול.

$$f''(x)=\frac{e^x(e^x+1)^2-2e^x(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{e^x(e^x+1)(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^4}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}}$$

$1-e^x$ **קובע את סימני הנגזרת השנייה .**

$$1-e^x=0$$

$$e^x=1$$

$$x=0$$

$f''(-1)=\frac{+\bullet(-)}{+}<0$ **,** $f''(1)=\frac{+\bullet+}{+}>0$ **, ולכן** $(0,0.5)$ **נקודת פיתול.**

תשובה: שיעורי נקודת הפיתול הם $(0,0.5)$ **.**

(4) ניעזר בתבנית הפונקציה $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ **, למציאת אסימפטוטה אופקית.**

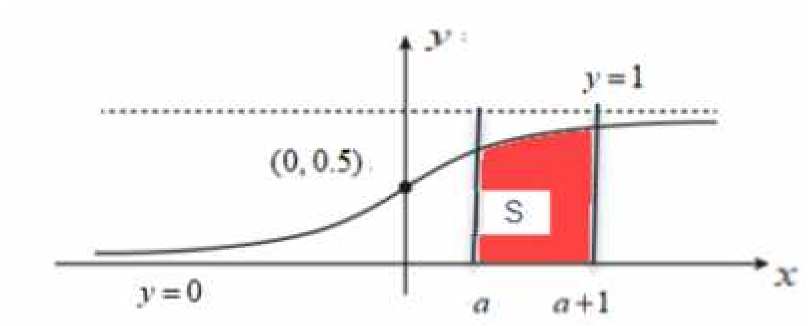
נציב $x=10$ **ונקבל** 0.9999 **, כלומר שאיפה ל-** $y=1$ **, מלמטה.**

נציב $x=-10$ **ונקבל** $4.5\cdot10^{-5}$ **, כלומר שאיפה ל-** $y=0$ **, מלמעלה.**

תשובה: $y=1$ **אסימפטוטה אופקית לימין, עבור** $x\to+\infty$ **.**

$y=0$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל, עבור** $x\to-\infty$ **.**

(5) הסקיצה המתאימה של $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ **(כולל סימון שטח, עבור סעיף ב).**



ב. גודל האינטגרל המסוים $\int_a^{a+1} f(x)dx$ **הוא כגודלו של השטח המסומן באות** S **.**

אולם שטח המלבן המסומן הוא 1**, כי רוחבו** $a+1-a=1$ **ואורכו** $1-0=1$ **(והמלבן הוא ריבוע).**

ולכן, $\int_a^{a+1} f(x)dx<1$ **.**

תשובה: הוכח.

ג. (1) $f(x)=g(x)+\frac{1}{2}$ **, נוכיח ש** $g(x)$ **היא פונקציה אי-זוגית.**

$$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$$

$$g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{2}=\frac{2e^x-(e^x+1)}{2(e^x+1)}$$

$$\boxed{g(x)=\frac{e^x-1}{2(e^x+1)}}$$

$$g(-x)=\frac{e^{(-x)}-1}{2(e^{(-x)}+1)}=\frac{\frac{1}{e^x}-1}{2(\frac{1}{e^x}+1)}=\frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{2(\frac{1+e^x}{e^x})}=\frac{1-e^x}{2(1+e^x)}$$

$$g(-x)=-\frac{e^x-1}{2(1+e^x)}$$

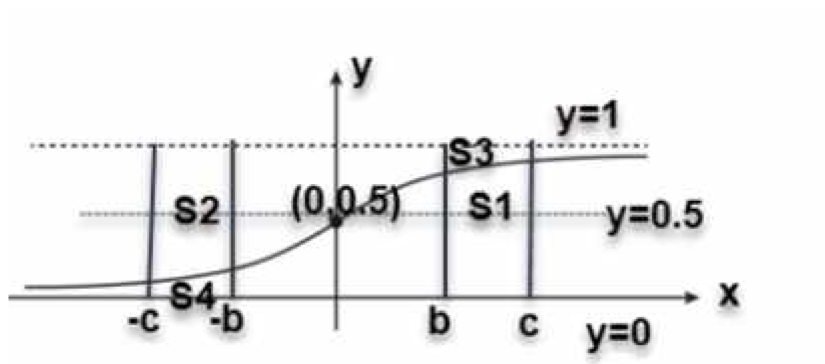
$$\boxed{g(-x)=-g(x)}\quad o.k.$$

והפונקציה אי-זוגית, כלומר סימטרית לראשית הצירים.

תשובה: הוכח.

(2) $f(x)=g(x)+\frac{1}{2}$**, כלומר** $f(x)$ **היא הזזה אנכית של** $g(x)$ **ב-** $\frac{1}{2}$ **יחידה כלפי מעלה.**

בהתאם הגרף של $f(x)$ **סימטרי לנקודה** $(0,0.5)$ **(כי** $g(x)$ **היה סימטרי לראשית, לנקודה** $(0,0)$**).**



על פי הסימטריה לנקודה $(0,0.5)$ **מתקבל ש-** $S1=S2$ **,** $S3=S4$ **.**

$S1+S3=(c-b)(1-0)=c-b$ **, ולכן** $S1+S4=c-b$ **.**

ומכאן ש: $\int_{-c}^{-b}f(x)dx+\int_{b}^{c}f(x)dx=c-b$ **.**

תשובה: הוכח.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(\ell n\,x)^n}{\sqrt{x}}$ **.**

(1) הן על פי הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית, והן עלפי הביטוי שבתוך השורש במכנה – ת.ה. $x>0$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x>0$ **.**

(2) $x>0$ **, ולכן אין חיתוך עם צירה-** y **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **, ולכן** $(\ell n\,x)^n=0 \quad \to \ell n\,x=0 \quad \to (1,0)$ **.**

תשובה: שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x **הם** $(1,0)$ **.**

ב. נחשב את נפח גוף הסיבוב, ונשווה ל- $\frac{32®}{2n+1}$ **. אין צורך לצייר סקיצה מתאימה.**

את האינטגרל נעשה לפי זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$® \int_1^{e^2} \left(\frac{(\ell n\,x)^n}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \frac{32®}{2n+1} \quad /®$$

$$dx =$$

$$\int_1^{e^2} \left(\frac{(\ell n\,x)^{2n}}{x}\right) dx = \frac{32}{2n+1}$$

$$\int_1^{e^2} \left((\ell n\,x)^{2n} \cdot \frac{1}{x}\right) dx = \frac{32}{2n+1}$$

$$\frac{(\ell n\,x)^{2n+1}}{2n+1}\Big]_1^{e^2} = \frac{32}{2n+1}$$

$$\frac{(\ell n\,e^2)^{2n+1}}{2n+1} - \frac{(\ell n\,1^2)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{32}{2n+1} \quad /\cdot(2n+1)$$

$$2^{2n+1}=32$$

$$2^{2n+1}=2^5$$

$$\boxed{n=2}$$

תשובה: $n=2$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(\ell n\,x)^2}{\sqrt{x}}$ **.**

(1) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה ונקבע את סוגן.

$$f'(x)=\frac{\frac{2\sqrt{x}\ell n\,x}{x}-\frac{(\ell n\,x)^2}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{2\ell n\,x}{\sqrt{x}}-\frac{(\ell n\,x)^2}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{4\ell n\,x-(\ell n\,x)^2}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{\ell n\,x\ \bullet\ (4-\ell n\,x)}{2x\sqrt{x}}}$$

$$\ell n\,x\ \bullet\ (4-\ell n\,x)=0$$

$$\ell n\,x=0\ \rightarrow \boxed{(1,0)}$$

$$\ell n\,x=4\ \rightarrow \boxed{(e^4,\frac{16}{e^2})}\ \leftarrow y=\frac{(\ell n\,e^4)^2}{\sqrt{e^4}}=\frac{4^2}{e^2}=\frac{16}{e^2}$$

$$f'(0.9)=\frac{(-)(+)}{+}<0$$

$$f'(1.1)=\frac{(+)(+)}{+}>0$$

$$f'(e^5)=\frac{(+)(-)}{+}<0$$

תשובה: $(1,0)$ **מינימום,** $(e^4,\frac{16}{e^2})$ **מקסימום.**

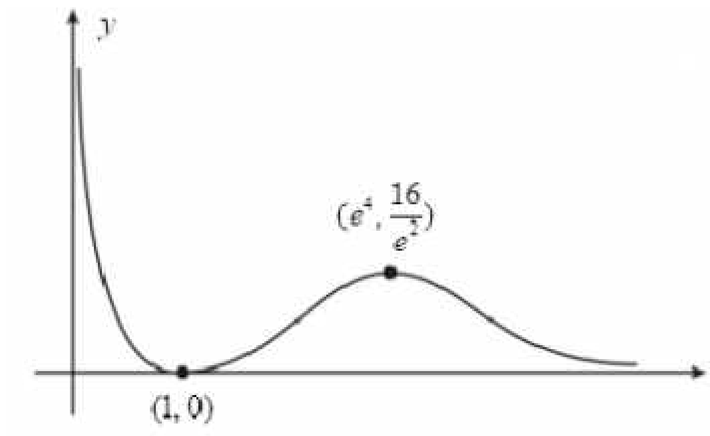
(2) נמצא את האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x **.**

נציב $x=0.000001$ **ונקבל** $190,868$**, כלומר שאיפה ל-** $+\infty$**, ו-** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

נציב $x=1000000$ **ונקבל** 0.19**, כלומר שאיפה ל-** $+0$**, ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית מימין, כמו בנתון.**

תשובה: $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

ד. הסרטוט המתאים:



ה. נתונה הפונקציה $(m \neq 0)$ $g(x) = f(x) + m$ **.**

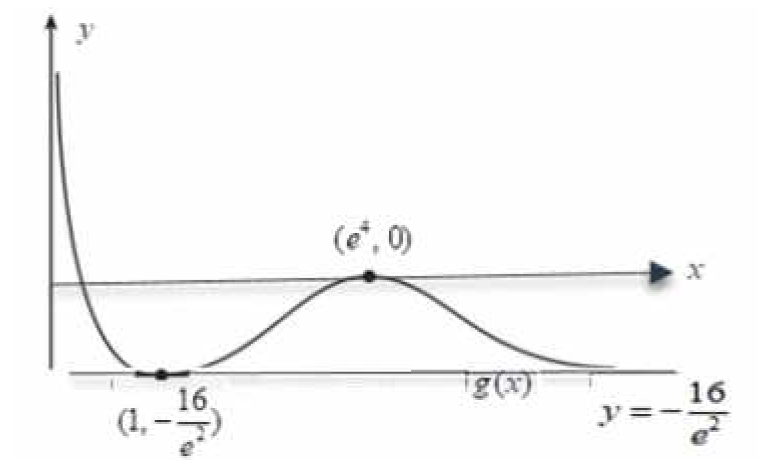
כלומר, $g(x)$ **היא תזוזה אנכית של** $f(x)$ **ב-** m **יחידות.**

(1) $g(x)$ **משיק לציר ה-** x **בנקודה אחת בלבד.**

כיוון ש- $m \neq 0$ **, הרי התזוזה היא כלפי <u>מטה</u> של** $\frac{16}{e^2}$ **יחידות, על מנת שנקודת המקסימום תשיק לציר ה-** x **.**

תשובה: $m = -\frac{16}{e^2}$**.**

(2) נצייר את $g(x)$ **לאחר התזוזה כלפי <u>מטה</u> ב-** $\frac{16}{e^2}$ **יחידות.**



תשובה: למשוואה $g(x) = k$ **יש פתרון יחיד, כאשר** $k > 0$ **, או** $k = -\frac{16}{e^2}$**.**