א. נתונה סדרה $a_1, a_2, a_3, ...$ **, המוגדרת על ידי כלל הנסיגה:**

$$\begin{cases} S_1 = 9 \\ S_{n+1} = S_n - 7n + 9 \end{cases}$$

נוכיח שהסדרה היא חשבונית.

$S_1 = 9$ **, ולכן** $\boxed{a_1 = 9}$ **.**

$$S_{n+1} - S_n = -7n + 9$$
$$a_{n+1} = -7n + 9$$
$$a_n = -7(n-1) + 9$$
$$a_n = -7n + 16 \quad \rightarrow a_1 = -7 \cdot 1 + 16 \quad \rightarrow a_1 = 9 \quad o.k.$$

ולכן $a_n = -7n + 16$ **לכל** n **טבעי.**

$$a_{n+1} - a_n = -7n + 9 - (-7n + 16)$$
$$a_{n+1} - a_n = -7n + 9 + 7n - 16$$
$$a_{n+1} - a_n = -7 \quad \rightarrow \boxed{d = -7}$$

ולכן, הסדרה חשבונית, כי ההפרש בין כל שני איברים עוקבים בסדרה הוא קבוע.

תשובה: הוכחנו.

ב. נתון שסדרה נוספת מקיימת $b_{n+1} - b_n = a_n$ **.**

נחשב את הסכום המבוקש:

$$\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + \frac{b_3 - b_2}{a_2 - a_3} + \frac{b_4 - b_3}{a_3 - a_4} + ... + \frac{b_{20} - b_{19}}{a_{19} - a_{20}} =$$
$$= \frac{a_1}{-d} + \frac{a_2}{-d} + \frac{a_3}{-d} + ... + \frac{a_{19}}{-d}$$
$$= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{19}}{-d}$$
$$= \frac{1}{7} \cdot \frac{19\left[2 \cdot 9 - 7(19-1)\right]}{2} = \boxed{-146\frac{4}{7}}$$

תשובה: הסכום הוא $-146\frac{4}{7}$**.**

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - **נשים** $\overline{A}$ - **גברים**

B - **קוראי עיתון בוקר** $\overline{B}$ - **לא קוראים עיתון בוקר**

<u>נתונים ומשמעויות מידיות</u>

על-מנת למלא טבלה של 2*2 נדרשות שלוש משוואות.

יחד עם זאת, לעיתים ניתן לענות על השאלה, גם ללא שלוש משוואות וטבלה מלאה, כמו בתרגיל הזה.

(1) $P(B/A)=0.2 \quad \rightarrow P(\overline{B}/A)=0.8$

(2) $N(\overline{A})=a\cdot N(B\cap A) \quad \rightarrow P(\overline{A})=a\cdot P(B\cap A)$

$P(B\cap A)=x \quad \rightarrow P(\overline{A})=ax$

	A **נשים**	$\overline{A}$ **גברים**	
B **קוראי עיתון בוקר**	x		
$\overline{B}$ **לא קוראים**			
	$1-ax$	ax	1

נבטא, באמצעות a **, את ההסתברות לבחור גבר מבין כלל תושבי העיר, את** $P(\overline{A})$ **.**

<u>פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית</u>

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$$0.2\cdot(1-ax)=x \quad /:0.2$$

$$1-ax=5x$$

$$1=ax+5x$$

$$1=(a+5)x$$

$$x=\frac{1}{a+5} \quad \rightarrow ax=\frac{a}{a+5} \quad \rightarrow \boxed{P(\overline{A})=\frac{a}{a+5}}$$

תשובה: ההסתברות לבחור גבר מבין תושבי העיר היא $\frac{a}{a+5}$ **.**

ב. נתון כי המאורעות "נבחרה אישה" ו"נבחר קורא/ת עיתון" אינם תלויים.

כאשר מאורעות אינם תלויים מתקבלות שלוש משוואות, שניתן לבחור בכל אחת מהן בהתאם לנתונים.

ואלו הן: $III: P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \quad II: P(A/B)=P(\overline{A}/B) \quad I: P(A/B)=P(A)$

לכן: $P(B)=P(B/A)=0.2$ **.**

תשובה: ההסתברות לבחירת משתתף שקורא עיתון בוקר היא 0.2 **.**

ג. נתון כי $a=6$, וכפי שנאמר קודם המאורעות מין/קורא אינם תלויים .

נציב בטבלה $P(B)=0.2$, $ax=6x=\frac{6}{11}$, $x=\frac{1}{6+5}=\frac{1}{11}$ ונשלים את כל הטבלה.

	גברים $\bar{A}$	**נשים** A	
קוראי עיתון בוקר B	$\frac{1}{11}$	$\frac{6}{55}$	0.2
לא קוראים $\bar{B}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{24}{55}$	0.8
	$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{11}$	1

יש שתי דרכים לענות על השאלה, ולהסביר שסביר יותר שזה גבר.

- **שיעור הגברים קוראי עיתון הבוקר גדול משיעור הנשים קוראות עיתון הבוקר**
- **על ידי הסתברות מותנית** $P(\bar{A}/B)=\frac{6/55}{0.2}>P(A/B)=\frac{1/11}{0.2}=\frac{5/55}{0.2}$ **.**

תשובה: סביר יותר, שמבין קוראי עיתון הבוקר בכנס, נבחר גבר.

ד. לפחות חמש נשים שקוראות עיתון בוקר, כלומר חמש או שש נשים.

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $n=6$, $p(\textit{women that read morning newspaper})=P(A\cap B)=\frac{1}{11}$ **,**

$k=2$ **.**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$P(\textit{at least } 5)=P_6(5)+P_6(6)=\binom{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{11}\right)^5\cdot\left(1-\frac{1}{11}\right)^{6-5}+\left(\frac{1}{11}\right)^6=6\cdot\left(\frac{1}{11}\right)^5\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^1+\left(\frac{1}{11}\right)^6=\frac{61}{1,771,561}$$

תשובה: ההסתברות שנבחרו לפחות חמש נשים שקוראות עיתון בוקר, היא $\frac{61}{1,771,561}$ **.**

א. $\sphericalangle EBF = \sphericalangle EFB = \sphericalangle FAB = \sim$ **(זווית בין משיק למיתר)**

$\sphericalangle BEF = 180° - 2\sim$ **(סכום זוויות ב-** ΔBEF **הוא** $180°$**).**

תשובה: $\sphericalangle BEF = 180° - 2\sim$ **.**

ב. נשלים את הגיאומטריה של התרגיל (הסברים מעבר לנדרש, רק למטרת הבנה.)

$\sphericalangle ABF = \sphericalangle ACF = 90°$ **(זוויות היקפיות הנשענות על הקוטר הן ישרות)**

$\sphericalangle CBF = \sphericalangle EFB = \sim$ **(זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים)**

$\sphericalangle CAF = \sphericalangle CBF = \sim$, $\sphericalangle BCF = \sphericalangle FAB = \sim$ **(נשענות על קשתות שוות)**

$\sphericalangle DFC = \sphericalangle DCF = \sphericalangle CAF = \sim$ **(זווית בין משיק למיתר)**

$BF = CF$ **(זוויות היקפיות שוות)**

$\Delta EBF \cong \sphericalangle DCF$ **(משפט חפיפה זווית מצלע זווית)**

עוד על משולשים דומים בסעיף ג...

נוריד גובה, EG **, שהוא גם תיכון לבסיס ב-** ΔEBF **שווה השוקיים.**

$\underline{\Delta ABF}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{BF}{\sin\sim} = 2R$$

$$\boxed{BF = 2R\sin\sim}$$

$$\boxed{BG = R\sin\sim}$$

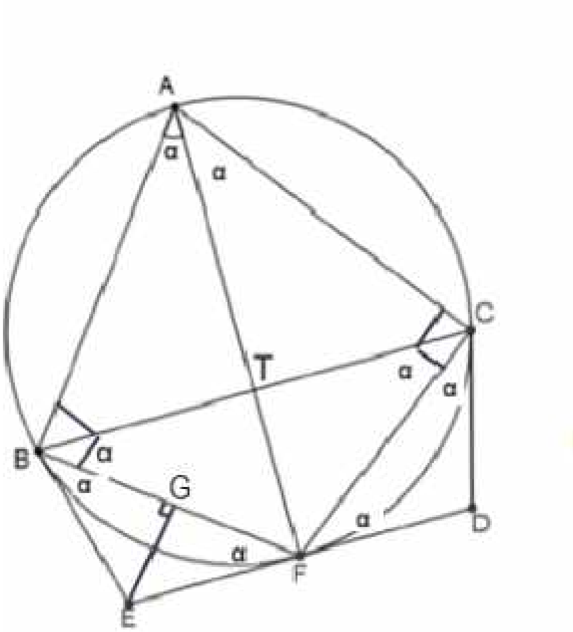
$\underline{\Delta BEG}$

$$\cos\sim = \frac{BG}{BE}$$

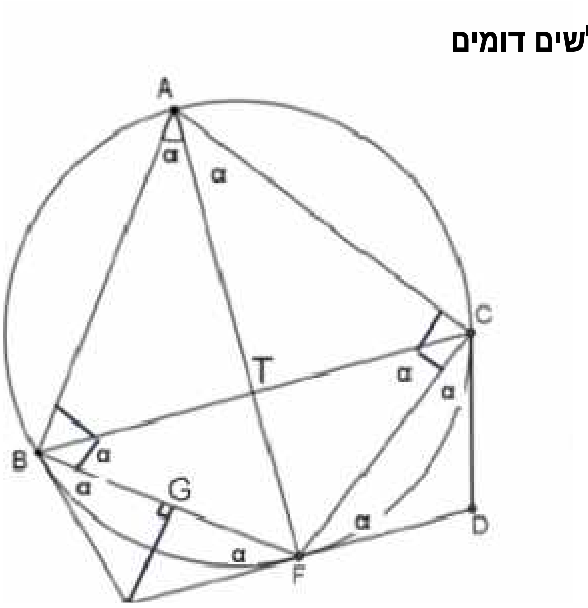
$$BE = \frac{R\sin\sim}{\cos\sim}$$

$$\boxed{BE = R\tan\sim}$$

תשובה: הוכחנו.



ג. נחשב את מידת הזווית α בשתי דרכים.



(1) על פי יחס שטחים שווה לריבוע יחס הדמיון במשולשים דומים

$\Delta BEF \sim \Delta BFC$ **(משפט דמיון זווית זווית)**

(2) לפי נוסחאות טריגונומטריות לשטח משולש

$$3S_{\Delta BEF} = S_{\Delta BFC}$$

$$3\cdot\frac{(BF)^2\sin\alpha\sin\alpha}{2\sin(180°-2\alpha)} = \frac{(BF)^2\sin\alpha\sin(180°-2\alpha)}{2\sin\alpha}$$

$$3\sin^2\alpha = \sin^2 2\alpha$$

$$3\sin^2\alpha = (2\sin\alpha\cos\alpha)^2$$

$$3\sin^2\alpha = 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha \quad /:4\sin^2\alpha > 0$$

$$\frac{3}{4}\cos^2\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \leftarrow \cos\alpha > 0$$

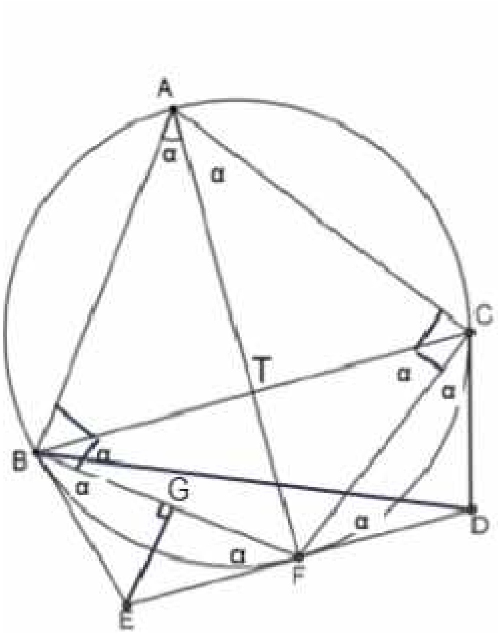
$$\boxed{\alpha = 30°}$$

ד. נחשב את אורכו של הקטע BD.

$\alpha = 30°$**, ובהתאם** $\sphericalangle BEF = 120°$ **.**

$$EF = BE = R\tan 30° = R\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(צלעות מתאימות במשולשים חופפים) $DF = EF = R\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \to ED = 2R\frac{\sqrt{3}}{3}$



$\underline{\Delta BDE}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(BD)^2 = (BE)^2 + (ED)^2 - 2BE\cdot ED\cdot\cos\sphericalangle BEF$$

$$(BD)^2 = (R\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (2R\frac{\sqrt{3}}{3})^2 - 2\cdot R\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2R\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\cos 120°$$

$$(BD)^2 = \frac{1}{3}R^2 + \frac{4}{3}R^2 + \frac{2}{3}R^2$$

$$(BD)^2 = \frac{7}{3}R^2$$

$$\boxed{BD = R\frac{\sqrt{21}}{3} \approx 1.528R} \quad \leftarrow BD > 0$$

תשובה: אורכו של הקטע BD הוא $R\frac{\sqrt{21}}{3} \approx 1.528R$.

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=2\cos^2 2x$.

כיווץ פי 2 **של** $\cos x$ **, העלאה בריבוע, וכפל פי** 2 .

זו פונקציה אי-שלילית, עם נקודות מינימום $(\frac{\text{®}}{4}+\frac{\text{®}}{2}k,0)$ **(על פי נקודות אפס ידועות של** $\cos x$ **וכיווץ),**

עם נקודת חיתוך $(0,2)$ **של ציר ה-** y **,**

ועם ערכים מקסימליים של 2 $|2\cdot(\pm1)|=2$ **(**$-1\le\cos x\le1$**).**

בהתאם, רק גרף ב מתאים.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\cos 4x+2$ **.**

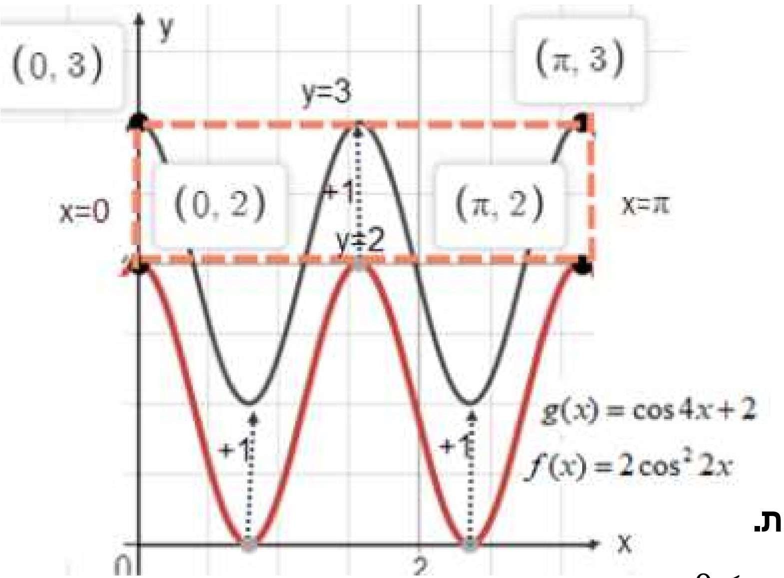
כיווץ פי 4 **של** $\cos x$ **, והזזה** 2 **יחידות כלפי מעלה.**

זו פונקציה חיובית, עם ערכים מינימליים של 1 **, ומקסימליים של** 3 **(**$-1\le\cos x\le1$**).**

בהתאם, רק גרף ד מתאים.

תשובה: גרף ב מתאים ל- $f(x)=2\cos^2 2x$ **, גרף ד מתאים ל-** $g(x)=\cos 4x+2$ **.**

ב. נראה איזו תזוזה אנכית של $f(x)=2\cos^2 2x$ **, תביא ל-** $g(x)=\cos 4x+2$ **, כי נתון ש-** $g(x)=f(x)+c$ **.**



$$g(x)=\cos 4x+2$$
$$g(x)=2\cos^2 2x-1+2 \quad \leftarrow \cos 2\sim\ =2\cos^2\sim\ -1$$
$$g(x)=2\cos^2 2x+1$$
$$\boxed{g(x)=f(x)+1}\rightarrow\boxed{c=1}$$

כלומר $g(x)$ **היא הזזה אנכית של** $f(x)$ **,**

כלפי מעלה ביחידה אחת.

תשובה: $c=1$.

ג. $f(x)$ **היא הזזה כלפי מעלה של** $g(x)$ **ביחידה אחת.**

שתי הפונקציות חיוביות לכל x **, ובפרט בתחום** $0\le x\le\text{®}$.

לכן, $\int_0^{\text{®}} f(x)\,dx$ **, וגם** $\int_0^{\text{®}} g(x)\,dx$ **מייצגים את השטח שבין הפונקציות וציר ה-** x **, בתחום** $0\le x\le\text{®}$**.**

כאשר ההעלאה כלפי מעלה ביחידה אחת, מוסיפה לשטח מלבן, ששטחו $(\text{®}-0)(1-0)=\text{®}$.

ניתן גם: $\int_0^{\text{®}} g(x)\,dx=\int_0^{\text{®}}(f(x)+1)\,dx=\int_0^{\text{®}} f(x)\,dx+\int_0^{\text{®}}1\,dx=\int_0^{\text{®}} f(x)\,dx+\left[x\right]_0^{\text{®}}=\int_0^{\text{®}} f(x)\,dx+[\text{®}-0]=\int_0^{\text{®}} f(x)\,dx+\text{®}$

תשובה: $\int_0^{\text{®}} g(x)\,dx$ **גדול מ-** $\int_0^{\text{®}} f(x)\,dx$ **ב-** ®**.**

ד. נחשב את נפח גוף הסיבוב המבוקש, שנובע מסיבוב סביב ציר ה- x , של גרף הפונקציה $\sqrt{f(x)}$.

.

$$V=\circledR\int_0^{\circledR}(\sqrt{f(x)})^2\ dx$$

$$V=\circledR\int_0^{\circledR}(f(x)\ dx=$$

$$V=\circledR\int_0^{\circledR}(g(x)-1)\ dx=$$

$$V=\circledR\int_0^{\circledR}(\cos 4x+2-1)\ dx=$$

$$V=\circledR\int_0^{\circledR}(\cos 4x+1)\ dx=$$

$$V=\circledR\left[\frac{\sin 4x}{4}+x\Big]_0^{\circledR}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\circledR:\quad \circledR(0+\circledR)=\circledR^2 \\ x=0:\circledR\quad (0+0)=0 \end{array}\right\} V=\circledR^2$$

תשובה: נפח גוף הסיבוב הוא $\circledR^2$.

א. נתונה הפונקציה: $g(x)=1+\cos ax$ **.**

בנקודות החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$1+\cos ax=0$$
$$\cos ax=-1$$
$$ax=® +2®k$$
$$x=\frac{®}{a}+\frac{2®k}{a}$$

ומכאן ששתי נקודות סמוכות הן, למשל, $(\frac{3®}{a},0)$ **ו-** $(\frac{®}{a},0)$**.**

המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות עם ציר ה- x **הוא** $®$ **.**

$$\frac{3®}{a}-\frac{®}{a}=® \quad /:\frac{®}{a}\neq 0$$
$$3-1=a$$
$$\boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2$ **.**

ב. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin x}{g(x)}$**, ועבור** $a=2$ **הפונקציה היא** $\boxed{f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos 2x}}$ **, בתחום** $-® \le x \le 3®$ **.**

(1) נמצא את תחום ההגדרה (נבדוק מחדש, למרות שניתן להיעזר בסעיף א).

$$1+\cos 2x\neq 0$$
$$\cos 2x\neq -1$$
$$2x\neq ® +2®k$$
$$x\neq \frac{®}{2}+®k$$

תשובה: תחום ההגדרה הוא $-® \le x \le 3®,\ x\neq -\frac{®}{2},\frac{®}{2},\frac{3®}{2},\frac{5®}{2}$ **.**

(2) אסימפטוטות אנכיות: $x=\frac{5®}{2}$ **,** $x=\frac{3®}{2}$ **,** $x=\frac{®}{2}$ **,** $x=-\frac{®}{2}$**.**

(3) בנקודות החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$\frac{\sin x}{1+\cos 2x}=0$$
$$\sin x=0$$
$$x=®k$$

תשובה: נקודות החיתוך עם הצירים: $(-®,0),(0,0),(®,0),(2®,0),(3®,0)$ **.**

(4) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה, ואת נקודות הקיצון וסוגן:

נקודות קצה (שתהיינה גם נקודות קיצון): $(0\,,\,3\pi)$, $(0\,,\,-\pi)$ **.**

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos 2x}$$

$$f'(x)=\frac{\cos x(1+\cos 2x)-\sin x(-2\sin 2x)}{(1+\cos 2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos x(1+\cos 2x)+4\sin x\sin x\cos x}{(1+\cos 2x)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{\cos x(1+\cos 2x+4\sin^2 x)}{(1+\cos 2x)^2}}$$

מכנה הנגזרת חיובי בתחום ההגדרה, הערך המינימלי של הכופל הימני במונה הוא 2 **,**
ולכן סימני הנגזרת נקבעים בהתאם לביטוי $\cos x$ **.**

תשובה: עלייה: $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2}$ **, או** $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

ירידה: $\frac{5\pi}{2}<x<3\pi$ **, או** $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ **, או** $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$ **.**

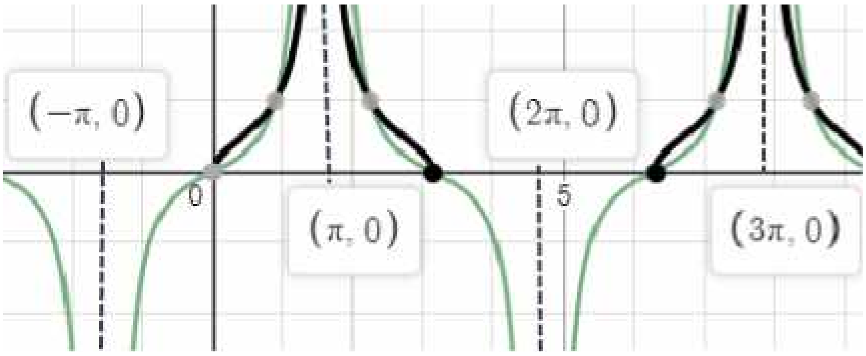
נקודות קיצון: $(3\pi\,,\,0)$ **מינימום,** $(-\pi\,,\,0)$ **מקסימום.**

ג. סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos 2x}$ **, כולל של** $h(x)=\sqrt{f(x)}$ **.**

תחום ההגדרה של $h(x)$ **הוא תחום אי-השליליות של** $f(x)$ **.**

נשים לב שכאשר $0\le f(x)\le 1$ **מתקיים** $h(x)=\sqrt{f(x)}\ge f(x)$ **.**

וכאשר $f(x)\ge 1$ **מתקיים** $h(x)=\sqrt{f(x)}<f(x)$ **.**



א. נתונה הפונקציה: $g(x)=1+\cos ax$.

בנקודות החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$.

$$1+\cos ax=0$$
$$\cos ax=-1$$
$$ax=\pi+2\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{a}+\frac{2\pi k}{a}$$

ומכאן ששתי נקודות סמוכות הן, למשל, $(\frac{3\pi}{a},0)$ **ו-** $(\frac{\pi}{a},0)$**.**

המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות עם ציר ה- x **הוא** π .

$$\frac{3\pi}{a}-\frac{\pi}{a}=\pi \quad /:\frac{\pi}{a}\neq 0$$
$$3-1=a$$
$$\boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2$.

ב. עבור $a=2$ **הפונקציה היא** $\boxed{f(x)=\frac{\sin x}{(1+\cos 2x)^2}}$ **, בתחום** $-\pi\le x\le 3\pi$.

נעבד גם את תבנית הפונקציה, במיוחד לצורך האינטגרל בסעיף ד.

$$f(x)=\frac{\sin x}{(1+\cos 2x)^2}$$
$$f(x)=\frac{\sin x}{(1+2\cos^2 x-1)^2}$$
$$f(x)=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}$$
$$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos x\cos^4 x-4\cos^3 x(-\sin x)}{\cos^8 x}$$
$$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos^2 x+4\sin^2 x}{\cos^5 x}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{1+3\sin^2 x}{4\cos^5 x}} \leftarrow \cos^2 x+\sin^2 x=1$$

הוכחנו.

ג. נחקור את הפונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{(1+\cos 2x)^2}$**, בתחום** $-\pi \le x \le 3\pi$ **.**

(1) נמצא את תחום ההגדרה (נבדוק מחדש, למרות שניתן להיעזר בסעיף א).

$$1+\cos 2x \ne 0$$
$$\cos 2x \ne -1$$
$$2x \ne \pi + 2\pi k$$
$$x \ne \frac{\pi}{2}+\pi k$$

תשובה: תחום ההגדרה הוא $-\pi \le x \le 3\pi\ ,\ x \ne -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ **.**

(2) אסימפטוטות אנכיות: $x=\frac{5\pi}{2}$ **,** $x=\frac{3\pi}{2}$ **,** $x=\frac{\pi}{2}$ **,** $x=-\frac{\pi}{2}$**.** $x=\frac{\pi}{4}$ **.**

(3) בנקודות החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$\frac{\sin x}{1+\cos 2x}=0$$
$$\sin x = 0$$
$$x=\pi k$$

תשובה: נקודות החיתוך עם הצירים: $(-\pi, 0)\ ,\ (0, 0)\ ,\ (\pi, 0)\ ,\ (2\pi, 0)\ ,\ (3\pi, 0)$ **.**

(4) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה, ואת נקודות הקיצון וסוגן:

נקודות קצה (שתהיינה גם נקודות קיצון): $(-\pi, 0)\ ,\ (3\pi, 0)$**.**

$f'(x)=\frac{1+3\sin^2 x}{4\cos^5 x}$ **על-פי סעיף ב.**

הערך המינימלי של המונה הוא 1**, ולכן סימני הנגזרת נקבעים בהתאם לביטוי** $\cos x$ **, שבמכנה.**

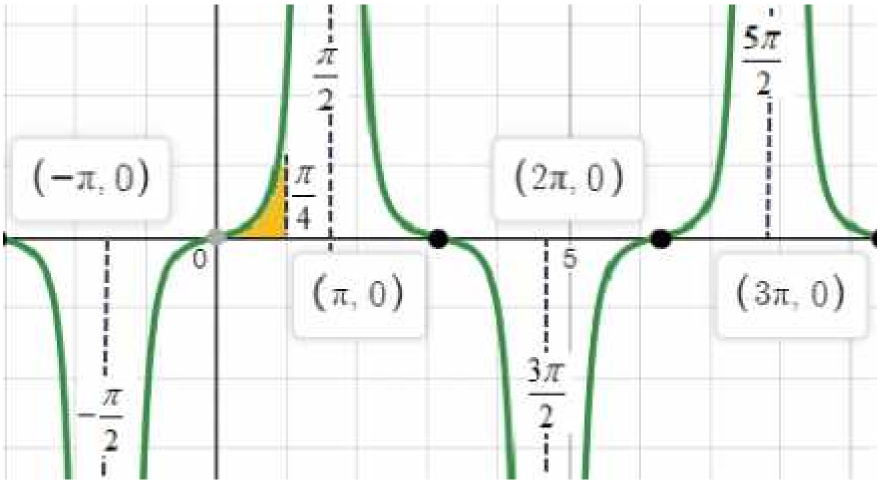
תשובה: עלייה: $\frac{5\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ **,** $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2}$ **, או** $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ **.**

ירידה: $\frac{5\pi}{2}<x<3\pi$ **, או** $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ **, או** $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$**.**

נקודות קיצון: $(3\pi, 0)$ **מינימום,** $(-\pi, 0)$ **מקסימום.**

ג. סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{(1+\cos 2x)^2}$ **, בתחום** $-® \le x \le 3®$ **,**

כולל סימון השטח עבור סעיף ד.



ד. נחשב את השטח המבוקש, המסומן בציור, עם אינטגרל המבוסס על זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$S=\int_0^{\frac{®}{4}}\left(\frac{\sin x}{(1+\cos 2x)^2}-0\right)dx$$

$$S=\int_0^{\frac{®}{4}}\left(\frac{\sin x}{4\cos^4 x}\right)dx$$

$$S=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{®}{4}}\left[-(\cos x)^{-4}(-\sin x)\right]dx$$

$$S=\frac{1}{4}\left[-\frac{(\cos x)^{-3}}{-3}\Big]_0^{\frac{®}{4}}\right]$$

$$S=\frac{1}{12}\left[\frac{1}{\cos^3 x}\Big]_0^{\frac{®}{4}}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{®}{4}: \quad \frac{1}{12}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{6} \\ x=0: \quad \frac{1}{12}\cdot 1=\frac{1}{12} \end{array}\right\} \boxed{S=\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{1}{12}\approx 0.1524}$$

תשובה: גודל השטח הוא $\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{1}{12}\approx 0.1524$ **.**

7

א. נתונה הפונקציה: $\boxed{f(x)=\dfrac{\sqrt{\cos x}}{\sin x}}$ **והתחום** $-® \le x \le ®$ **.**

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר נזכור שפונקציית ה- $\cos$ **חיובית ברביע הראשון והרביעי.**

$$\cos x \ge 0$$

$$\boxed{-\frac{®}{2} \le x \le \frac{®}{2}}$$

$\sin x$ **מאפס את המכנה, לכן** $x \ne ® k$ **.**

תשובה: $x \ne 0\ ,\ -\frac{®}{2} \le x \le \frac{®}{2}$**.**

(2) נראה שהפונקציה אי-זוגית (סימטרית לראשית הצירים).

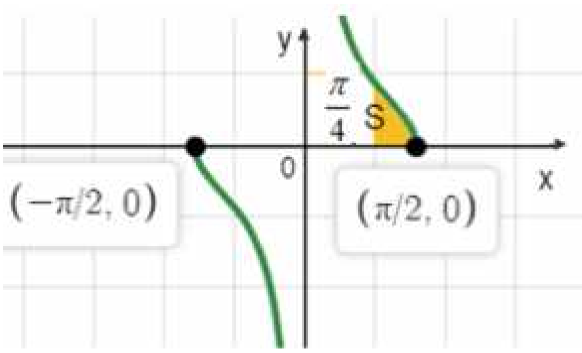
$$f(-x)=\frac{\sqrt{\cos(-x)}}{\sin(-x)}$$

$$f(-x)=\frac{\sqrt{\cos x}}{-\sin x}$$

$$f(-x)=-f(x)$$

תשובה: הפונקציה אי-זוגית.

ב. הסקיצה המתאימה כולל סימון השטח, עבור סעיף ג.



ג. נחשב את נפח גוף הסיבוב המבוקש, של השטח המסומן סביב ציר ה- x **.**
האינטגרל יהיה על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$V = \text{®}\int_{\frac{\text{®}}{4}}^{\frac{\text{®}}{2}} \left(\frac{\sqrt{\cos x}}{\sin x}\right)^2 \, dx$$

$$V = \text{®}\int_{\frac{\text{®}}{4}}^{\frac{\text{®}}{2}} \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) \, dx$$

$$V = \text{®}\int_{\frac{\text{®}}{4}}^{\frac{\text{®}}{2}} \left[(\sin x)^{-2} \cos x)\right] \, dx$$

$$V = \text{®}\left[\frac{(\sin x)^{-1}}{-1} \Big]_{\frac{\text{®}}{4}}^{\frac{\text{®}}{2}}\right]$$

$$V = \text{®}\left[-\frac{1}{\sin x} \Big]_{\frac{\text{®}}{4}}^{\frac{\text{®}}{2}}\right]$$

$$x = \frac{\text{®}}{2}: \quad -\text{®} \cdot 1 = -\text{®}$$

$$x = \frac{\text{®}}{4}: \quad -\text{®} \cdot \sqrt{2} = -\text{®} \cdot \sqrt{2}$$

$$\boxed{V = \text{®}(\sqrt{2} - 1) \approx 1.302}$$

תשובה: נפח גוף הסיבוב הוא $1.302 \approx (\sqrt{2}-1)\text{®}$**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{k^2-x^2}$ **,** $k>0$ **פרמטר.**

זו פונקציה זוגית, אי-שלילית, כאשר תחום ההגדרה הוא $-k\le x\le k$**.**

מכאן שהגרפים שעשויים להתאים הם גרף ג וגרף ד,

שההבדל ביניהם הוא שלגרף ד יש שתי נקודות פיתול,

וגם ניתן לראות, שבגרף ד שיפועים שואפים ל- 0 **בקצוות.**

$f(x)=\sqrt{k^2-x^2}$ **היא הרכבה על הפרבולה בעלת המקסימום** $g(x)=k^2-x^2$, **כאשר** $g(x)\ge 0$**.**

נראה שהגרף הנכון הוא גרף ג, בשתי דרכים (ובנוסף למטה המחשה של שתי הפונקציות).

(1) גרף ד מתחיל בקעירות כלפי מעלה, כלומר לפיו $\sqrt{k^2-x^2}<k^2-x^2$ **.**

אולם כאשר $0<g(x)<1$ **, מתקבל דווקא ש** $\sqrt{g(x)}>g(x)$**, מה שמתאים לגרף ג.**

(2) $f(x)=\sqrt{g(x)}$

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{g''(x)\sqrt{g(x)}-\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}g'(x)}{g(x)}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\overset{(-)}{g''(x)}\overset{(+)}{g(x)}-\overset{(+)}{(g'(x))^2}}{\underset{}{\overset{(+)}{g(x)}}\overset{(+)}{\sqrt{g(x)}}}$$

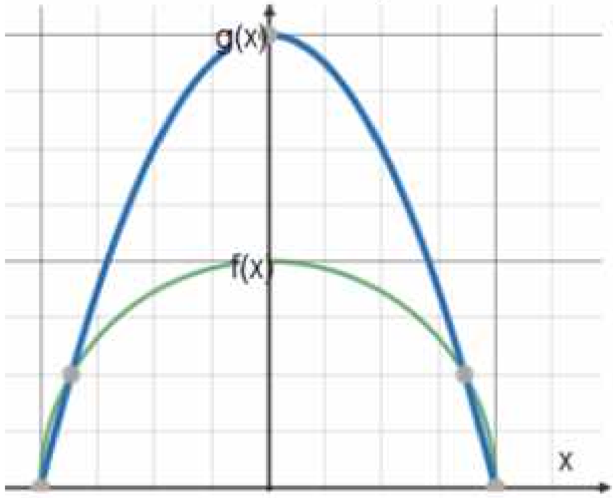
נזכור שבתחום ההגדרה של $f(x)$ **מתקיים** $g(x)\ge 0$ **, וכאשר** $f(x)>0$ **גם** $g(x)>0$**.**

$g''(x)<0$ **לכל** x**, שכן הפונקציה קעורה כלפי מטה לכל** x **(פרבולה בעלת מקסימום).**

המכנה של $f''(x)$ **חיובי. המחובר הימני במונה חיובי. המחובר השמאלי שלילי.**

לכן $f''(x)<0$ **והגרף המתאים הוא גרף ג.**

תשובה: הגרף המתאים הוא גרף ג.



ב. (1) הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא שטח המרובע ABOC.

נסמן $x_A = t$ **ובהתאם** $A(t, \sqrt{k^2 - t^2})$.

$AB = y_A - y_B = \sqrt{k^2 - t^2} \quad , \quad AC = x_A - x_C = t$.

$$\boxed{S = t\sqrt{k^2 - t^2}}$$

$$S' = \sqrt{k^2 - t^2} + \frac{t \cdot (-2t)}{2\sqrt{k^2 - t^2}}$$

$$S' = \frac{k^2 - t^2 - t^2}{\sqrt{k^2 - t^2}}$$

$$\boxed{S' = \frac{k^2 - 2t^2}{\sqrt{k^2 - t^2}}}$$

$$k^2 - 2t^2 = 0$$

$$t^2 = \frac{k^2}{2}$$

$$\boxed{t = \frac{k}{\sqrt{2}}} \quad \leftarrow t > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} S'(\frac{k}{2}) = \frac{+}{+} > 0 \\ S'(k) = \frac{-}{+} < 0 \end{array}\right\} t = \frac{k}{\sqrt{2}}, \max$$

$$y_A = \sqrt{k^2 - (\frac{k}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{k^2 - \frac{k^2}{2}} = \sqrt{\frac{k^2}{2}} = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{A\,(\frac{k}{\sqrt{2}}, \frac{k}{\sqrt{2}})}$$

תשובה: $A\,(\frac{k}{\sqrt{2}}, \frac{k}{\sqrt{2}})$ **, עבורה שטח המרובע (ריבוע, למעשה)** ABOC **יהיה מקסימלי.**

(2) נתון $S(2)$ **הוא השטח המקסימלי.**

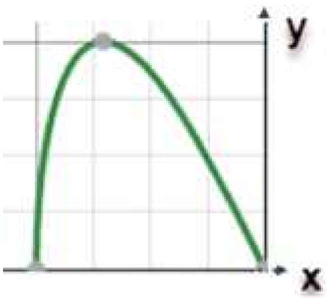
$$2 = \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot \frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$4 = k^2$$

$$\boxed{k = 2} \quad \leftarrow k > 0$$

תשובה: $k = 2$.

שרטוט לסעיף (3)



(3) עבור $x_A < 0$ **תתקבל פונקציית השטח** $S_1 = -t\sqrt{k^2 - t^2}$ **, כי** $AC = x_C - x_A = -t$.

שהיא, כמובן, גם פונקציה אי שלילית, הסימטרית ל- $S = t\sqrt{k^2 - t^2}$ **עבור** $x_A > 0$.

למעשה, $S_1(x) = S(-x)$ **, ולכן ציר ה-** y **הוא ציר הסימטריה (ההשתקפות) ביניהן.**