א. נתון המקום הגיאומטרי $x(6-x)=y(y+8)$ **.**

$$6x-x^2=y^2+8y$$
$$0=x^2-6x+y^2+8y$$
$$\boxed{(x-3)^2+(y+4)^2=25}$$

תשובה: המקום הגיאומטרי הוא מעגל, שמרכזו $(3,-4)$ **, ורדיוסו** 5**.**

ב. מזיזים את המקום הגיאומטרי, 3 **יחידות שמאלה ו-** 4 **יחידות כלפי מעלה,**

ומתקבל המעגל הקנוני $x^2+y^2=25$ **.**

עתה מגדילים את שיעורי ה- x**-ים פי** $\frac{4}{3}$ **.**

נפתור בשתי דרכים.

<u>דרך ראשונה</u>

נסמן $P(s,t)$ **נקודה על המקום הגיאומטרי החדש, מכאן ש-** $(\frac{3}{4}s,t)$ **היא נקודה על המעגל הקנוני.**

$$(\frac{3}{4}s)^2+t^2=25$$
$$\frac{9s^2}{16}+t^2=25$$
$$\frac{9s^2}{400}+\frac{t^2}{25}=1$$
$$\boxed{\frac{9x^2}{400}+\frac{y^2}{25}=1}$$

וזו אליפסה, שבה $a^2=\frac{400}{9}$ **ו-** $b^2=25$ **.**

<u>דרך שנייה</u>

אליפסה היא כיווץ/מתיחה של מעגל.

כיוון שמגדילים את שיעורי ה- x **פי** $\frac{4}{3}$ **, הרי שנקודת החיתוך הימני של הציר הגדול תהיה** $(\frac{4}{3}\cdot 5,0)=(6\frac{2}{3},0)$**,**

כאשר הציר הקטן יהיה לא שינוי. מכאן ש- $a=6\frac{2}{3}=\sqrt{\frac{400}{9}}, b=5$ **.**

תשובה: המקום הגיאומטרי הוא אליפסה, שמשוואתה $\frac{9x^2}{400}+\frac{y^2}{25}=1$ **.**

ג. הנקודה D **נמצאת על האליפסה** $\frac{9x^2}{400}+\frac{y^2}{25}=1$ **, שבה** $a^2=\frac{400}{9}$ **ו-** $b^2=25$ **.**

במשולש DFG **הצלע** FG **מחברת בין מוקדי האליפסה.**

$c=\sqrt{\frac{400}{9}-25}=\frac{5\sqrt{7}}{3}\approx 4.41$ **, ולכן אורך הצלע** FG **הוא** $2\cdot 4.41=8.82$ **.**

באליפסה, סכום מרחקי כל נקודה מהמוקדים קבוע ושווה ל- $2a$ **,**

ולכן סכום שתי הצלעות האחרות הוא: $DF+DG=2\cdot 6\frac{2}{3}=13\frac{1}{3}$ **.**

מכאן שהיקף המשולש הוא: $13\frac{1}{3}+8.82=22.15$ **.**

כיוון שאורך הצלע FG **הוא קבוע, הרי ששטח מקסימלי למשולש זה יתקבל כאשר הגובה הוא מקסימלי.**

כלומר, כאשר הגובה יונח על ציר ה- y **, ושיעורי הנקודה** D **יהיו** $(0,5)$ **או** $(0,-5)$ **.**

השטח המקסימלי המתקבל הוא: $\frac{8.82\cdot 5}{2}=22.05$ **.**

תשובה: היקף ΔDFG **הוא** 22.15 **יחידות, ושטחו המקסימלי הוא** 22.05 **יח"ר .**

ד. נתון המקום הגיאומטרי $|z-n|+|z-m|=\frac{40}{3}$ **, כאשר** n **,** m **מספרים ממשיים.**

נסמן $z=x+yi$

$$|z-n|+|z-m|=\frac{40}{3}$$

$$|x+yi-n|+|x+yi-m|=\frac{40}{3}$$

$$|(x-n)+yi|+|(x-m)+yi|=\frac{40}{3}$$

$$\sqrt{(x-n)^2+y^2}+\sqrt{(x-m)^2+y^2}=\frac{40}{3}$$

וקבלנו כי סכום של שני מרחקים בין שתי נקודות הוא קבוע, וזו הגדרתה של האליפסה.

על-מנת שמקום גיאומטרי זה יהיה זהה לאליפסה $\frac{9x^2}{400}+\frac{y^2}{25}=1$ **, שבה** $2a=2\cdot 6\frac{2}{3}=\frac{40}{3}$ **,**

והמוקדים שלה הם: $(\frac{5\sqrt{7}}{3},0)$ **ו-** $(-\frac{5\sqrt{7}}{3},0)$ **, נדרש ש-** $n=\frac{5\sqrt{7}}{3}$ **ו-** $m=-\frac{5\sqrt{7}}{3}$ **(או להפך).**

תשובה: $n=\frac{5\sqrt{7}}{3}$ **ו-** $m=-\frac{5\sqrt{7}}{3}$ **(מבלי לאבד את הכלליות, כלומר או להיפך) .**

א. נתונה האליפסה $x^2+4y^2=36$**.**

מוקדה של פרבולה קנונית נמצא על ציר ה- x **, כלומר בנקודת החיתוך של האליפסה עם ציר זה.**

האליפסה חותכת את ציר ה- x **בנקודות** $(6,0)$ **ו-** $(-6,0)$**.**

כיוון שנתן ש- $p>0$ **, הרי ש** $\frac{p}{2}=6$ **,** $p=12$ **ומשוואת הפרבולה היא** $y^2=24x$**.**

תשובה: משוואת הפרבולה הקנונית היא $y^2=24x$ **.**

ב. הנקודה P **נמצאת על הפרבולה** $y^2=24x$ **והנקודה** Q **על המיתר** OP **, כך ש-** $\frac{\text{PQ}}{\text{QO}}=\frac{1}{m}$ $(m>1)$ **.**

נסמן $\text{Q}(s,t)$ **נקודה על המקום הגיאומטרי החדש.**

על פי נוסחת חלוקת קטע ביחס נתון, נקבל ששיעורי הנקודה P **הם** $\text{M}(\frac{(m+1)s}{m},\frac{(m+1)t}{m})$**.**

(החישוב היה קל, כיוון שהנקודה O **היא ראשית הצירים).**

נציב במשוואת הפרבולה $y^2=24x$**.**

$$\frac{\left[(m+1)t\right]^2}{m^2}=24\,\frac{(m+1)s}{m}\quad /\cdot\frac{m^2}{(m+1)^2}$$

$$t^2=24\cdot\frac{ms}{m+1}$$

$$\boxed{y^2=\frac{24m}{m+1}x}$$

תשובה: המקום הגיאומטרי הוא פרבולה, שמשוואתה $y^2=\frac{24m}{m+1}x$ **.**

ג. ידוע כי המרחק בין המוקד הימני של האליפסה, לבין המוקד של הפרבולה החדשה הוא $3\sqrt{3}-4.5$.

משוואת האליפסה היא $x^2+4y^2=36$ **, או** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$**.**

$c=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$ **, ולכן שיעורי המוקד הימני של האליפסה הם** $(3\sqrt{3},0)$ **.**

משוואת הפרבולה היא $y^2=\frac{24m}{m+1}x$ **, ולכן שיעורי המוקד שלה הם** $(\frac{6m}{m+1},0)$**.**

כיוון שלא נתון לאיזה מוקד יש שיעור x **גדול יותר, הרי ש:** $\left|\frac{6m}{m+1}-3\sqrt{3}\right|=3\sqrt{3}-4.5$**.**

$$\frac{6m}{m+1}-3\sqrt{3}=3\sqrt{3}-4.5$$
$$\frac{6m}{m+1}=5.892$$
$$6m=5.892m+5.892$$
$$\cancel{m=54.71} \quad \leftarrow 1<m<6$$

או

$$\frac{6m}{m+1}-3\sqrt{3}=-3\sqrt{3}+4.5$$
$$\frac{6m}{m+1}=4.5$$
$$6m=4.5m+4.5$$
$$\boxed{m=3} \quad o.k.$$

תשובה: $m=3$ **.**

א. z_1 , z_2 ו- z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים <u>שונים</u> הנמצאים על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים.

z_1 ו- z_2 נמצאים ברביע הראשון, ו- z_3 נמצא ברביע השלישי.

נסמן $z_1 = r_1(\cos\sim + i\sin\sim)$.

כיוון ש- z_1 , z_2 ברביע הראשון ונמצאים על ישר העובר בראשית הצירים, הרי שהארגומנטים שלהם שווים,

אך הרדיוסים (הערכים המוחלטים) שונים, כי נתון שהם מספרים שונים. בהתאם: $z_2 = r_2(\cos\sim + i\sin\sim)$.

z_3 נמצא ברביע השלישי, על אותו ישר העובר בראשית הצירים, לכן $z_3 = r_3(\cos(\sim + 180°) + i\sin(\sim + 180°))$,

כאשר ייתכן כי הרדיוס של z_3 שווה לזה של z_1 או z_2 .

נעבד את ההצגה הטריגונומטרית של $\arg(z_3)$,

תוך שימוש בזהויות טריגונומטריות: $\sin(\sim + 180°) = -\sin\sim,\ \cos(\sim + 180°) = -\cos\sim$.

$$(\cos(\sim + 180°) + i\sin(\sim + 180°)) =$$
$$(-\cos\sim - i\sin\sim) =$$
$$-(\cos\sim + i\sin\sim)$$

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{r_1(\cos\sim + i\sin\sim) - (r_3(\cos(\sim + 180°) + i\sin(\sim + 180°))}{r_2(\cos\sim + i\sin\sim) - (r_3(\cos(\sim + 180°) + i\sin(\sim + 180°))}$$
$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{(\cos\sim + i\sin\sim)(r_1 + r_3)}{(\cos\sim + i\sin\sim)(r_2 + r_3)}$$
$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{r_1 + r_3}{r_2 + r_3}$$

תשובה: המנה של $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ היא $\frac{r_1 + r_3}{r_2 + r_3}$.

א. נבחן את שלוש המשוואות.

המשותף לשלושתן, שבכולן מדברים על z_1 ו- z_3 , אשר מועלים בחזקות אילו, או אחרות.

בכל מקרה התוצאה שווה, כלומר $r_1 = r_3$ בכולן.

מכיוון שמספרים אלו ממוקמים על אותו ישר, העובר בראשית הצירים,

הם צריכים להיות קדקודים נגדיים של מצולע משוכלל, הממוקמים ברביע הראשון והשלישי,

כאשר האלכסון ביניהם עובר בראשית.

(1) $(z_1)^7=(z_3)^7=-128$ **.**

כיוון שמדובר בחזקה מסדר 7**, הרי שיהיו שבעה פתרונות אפשריים,**

שמהווים סדרה הנדסית, שמנתה היא $cis(\frac{360°}{7})=cis(51\frac{3}{7}°)$ **,**

כאשר פתרונות אלו מהווים קדקודים של משובע משוכלל, כאשר אף אלכסון לא עובר בראשית,

כי מספר הקדקודים אינו זוגי. מכאן שמשוואה זו אינה מתאימה.

נראה גם בצורה חישובית:

$$(z_1)^7=-128 \quad \to r_1^{\,7}cis(7\theta)=2^7cis(180°+360°k) \quad \to r_1=2, \theta=25\frac{5}{7}°$$

$$(z_3)^7=-128 \quad \to -r_3^{\,7}cis(7\theta)=-128 \quad \to r_3^{\,7}cis(7\theta)=2^7cis(360°k) \quad \to r_3=2, \theta=51\frac{3}{7}°$$

מסקנה: המשוואה $(z_1)^7=(z_3)^7=-128$ **אינה מתאימה.**

(2) $(z_1)^4=(z_3)^4=64$ **.**

כיוון שמדובר בחזקה מסדר 4 **, הרי שיהיו ארבעה פתרונות אפשריים,**

שמהווים סדרה הנדסית, שמנתה היא $cis(\frac{360°}{4})=cis(90°)$ **,**

כאשר פתרונות אלו מהווים קדקודים של ריבוע, כאשר שני אלכסוניו עוברים בראשית.

אולם 64 **הוא מספר ממשי, כך שהפתרון** $\sqrt[4]{64}=\sqrt{8}$ **יהיה על ציר ה-** x **ושאר הפתרונות גם על הצירים.**

מכאן שמשוואה זו אינה מתאימה, כי $0°<\theta<90°$ **.**

מסקנה: המשוואה $(z_1)^4=(z_3)^4=64$ **אינה מתאימה.**

(3) $(z_1)^8=(z_3)^8=-8-8i\sqrt{3}$ **. כיוון שמדובר בחזקה מסדר** 8**, הרי שיהיו שמונה פתרונות אפשריים,**

שמהווים סדרה הנדסית, שמנתה היא $cis(\frac{360°}{8})=cis(45°)$ **, שלפחות שניים ביניהם בהכרח ברביע**

הראשון והשלישי, עם הפרש זוויות של $4\cdot 45°=180°$ **ולכן משוואה זו בהכרח תתאים.**

פתרונות אלו מהווים קדקודים של מתומן משוכלל, כאשר חלק מאלכסוניו נחתכים בראשית,

כי מספר הקדקודים זוגי. מכאן שמשוואה זו , כאמור, תתאים.

$$-8-8i\sqrt{3}: \quad \tan\gamma=\frac{-8\sqrt{3}}{-8}=\sqrt{3} \quad \to \gamma=240° \quad (3rd\ quadrant), R=\sqrt{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2}=16$$

$$\left.\begin{array}{l}(z_1)^8=-8-8i\sqrt{3} \quad \to r_1^{\,8}cis(8\theta)=16cis(240°) \quad \to r_1=\sqrt{2}, \theta=30° \\ (z_3)^8=-8-8i\sqrt{3} \quad \to (-r_3)^8cis(8\theta)=16cis(240°) \quad \to r_3=\sqrt{2}, \theta=30°\end{array}\right\} o.k.$$

מסקנה: המשוואה $(z_1)^8=(z_3)^8=-8-8i\sqrt{3}$ **מתאימה.**

א. בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = i$ **,** $a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ **. נמצא תחילה את מנת הסדרה.**

$$a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i: \quad \tan\gamma = \frac{-0.5\sqrt{2}}{-0.5\sqrt{2}} = 1 \quad \to \gamma = 225° \quad (3rd\ quadrant), R = \sqrt{(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1$$

$$\left.\begin{matrix} a_2 = cis(225°) \\ a_1 = cis(90°) \end{matrix}\right\} q = \frac{cis(225°)}{cis(90°)} \quad \to \boxed{q = cis(135°)}$$

נמצא את <u>מכפלת</u> 15 **האיברים הראשונים בסדרה.**

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_2 \cdot ...... \cdot a_{15} = cis(90°) \cdot cis(225°) \cdot cis(360°) \cdot ...... \cdot cis(1980°)$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_2 \cdot ...... \cdot a_{15} = cis(90° + 225° + 360° + ... + 1980°)$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_2 \cdot ...... \cdot a_{15} = cis\left[\frac{15(90° + 1980°}{2}\right]$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_2 \cdot ...... \cdot a_{15} = cis(15,525°)$$

$$\boxed{a_1 \cdot a_2 \cdot a_2 \cdot ...... \cdot a_{15} = cis(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} \quad \leftarrow 15,525° - 54 \cdot 360°$$

תשובה: מכפלת 15 **האיברים הראשונים בסדרה היא** $cis(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$**.**

ב. נמצא את הערך של n **, המספר הטבעי הקטן ביותר, עבורו** $a_n = a_1$ **.**

$$a_n = a_1$$

$$a_1 q^{n-1} = a_1 \quad / : a_1 \neq 0$$

$$(cis(135°))^{n-1} = 1$$

$$cis(135°(n-1)) = 360°k$$

כפולה משותפת מינימלית של $135°$ **ו-** $360°$ **(הרי** $n-1$ **טבעי) היא** $1080°$**.**

$$135° \cdot 8 = 1080$$

$$n - 1 = 8$$

$$\boxed{n = 9}$$

תשובה: $n = 9$ **הוא המספר הטבעי הקטן ביותר, עבורו** $a_n = a_1$ **.**

ב. גובה הפירמידה הישרה ABCD **הוא** 2**.**

$$a_1 = i \quad \to \mathrm{A}(0,1)$$

$$\text{b}\, a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \to \mathrm{B}(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$a_3 = a_1 q^2 = i\, cis 270° = i\,(-i) = 1 \quad \to \mathrm{C}(1,0)$$

(1) נחשב את שטח בסיס הפירמידה בשלוש דרכים (ושילוב שלהן).

(א) אנליטית

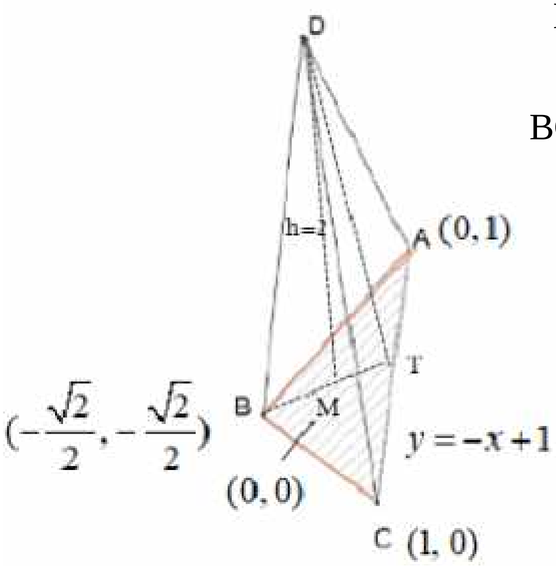
$\Delta\mathrm{ABC}$ **הוא שווה שוקיים:** $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \sqrt{(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0)^2} = 1.8478$

משוואת בסיס המשולש, AC **, היא** $x + y - 1 = 0$ **.**

אורך הגובה לבסיס הוא $\mathrm{BT} = \frac{\left| -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1.707$

אורך בסיס המשולש הוא $\mathrm{BC} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$

$$S_{\Delta\mathrm{ABC}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1.707}{2} = 1.207$$



(ב) טריגו במישור

$\Delta\mathrm{ABC}$ **לפי משפט הקוסינוסים:**

$$\cos\sphericalangle \mathrm{B} = \frac{1.8478^2 + 1.8478^2 - \sqrt{2}^2}{2 \cdot 1.8478 \cdot 1.8478} \quad \to \sphericalangle \mathrm{B} = 45°$$

$$S_{\Delta\mathrm{ABC}} = \frac{1.8478 \cdot 1.8478 \cdot \sin 45°}{2} = 1.207$$

(ב) מרוכבים במישור גאוס

$\Delta\mathrm{ABC}$ **לפי משפט הסינוסים:**

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 45°} = 2R \quad \to \sphericalangle \mathrm{R} = 1 \quad \to \mathrm{M}(0,0) \quad \leftarrow \mathrm{MA} = \mathrm{MC} = \mathrm{MB} = 1$$

$$S_{\Delta\mathrm{ABC}} = S_{\Delta\mathrm{AMC}} = S_{\Delta\mathrm{AMB}} = S_{\Delta\mathrm{CMB}} = \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 135°}{2} \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 135°}{2} = 1.207$$

נפח הפירמידה: $V_{\mathrm{ABCD}} = \frac{S_{\Delta\mathrm{ABC}} \cdot h}{3} = \frac{1.207 \cdot 2}{3} = 0.8047$ **.**

תשובה: נפח הפירמידה ABCD **הוא** 0.8047 **יחידות נפח.**

(2) נחשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס, למשל את $\sphericalangle DCM$ **.**

ΔDCM

$$\tan\sphericalangle DCM = \frac{DM}{MC} = \frac{2}{1} \quad \rightarrow \boxed{\sphericalangle DCM = 63.43^\circ}$$

תשובה: הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס ABC **היא בת** 63.43° **.**

(3) נחשב את הזווית שבין הפאה הצדדית ADC **לבין פאת הבסיס** ABC**.**

פאות הפירמידה הן משולשים שווי שוקיים.

הזווית, שבין הפאה הצדדית (ΔADC) **לבסיס הפירמידה** ABC **,**

היא הזווית בין שני האנכים (הגבהים) לישר החיתוך (מקצוע הבסיס AC)**.**

נוריד גובה AT **מהפאה למקצוע הבסיס, ולכן הוא גם תיכון**.

BMT **הוא אנך מהבסיס, כי הוא תיכון שמתלכד עם הגובה לבסיס, במשולש שווה שוקיים** ABC**.**

(מרכז מעגל חוסם הוא מפגש אנכים אמצעיים, לכן BT **עובר ב-** M **.)**

הזווית בין הפאה הצדדית ADC **למישור הבסיס היא** $\sphericalangle DTM$**.**

$$MT = BT - BM = BT - R = 1.707 - 1$$

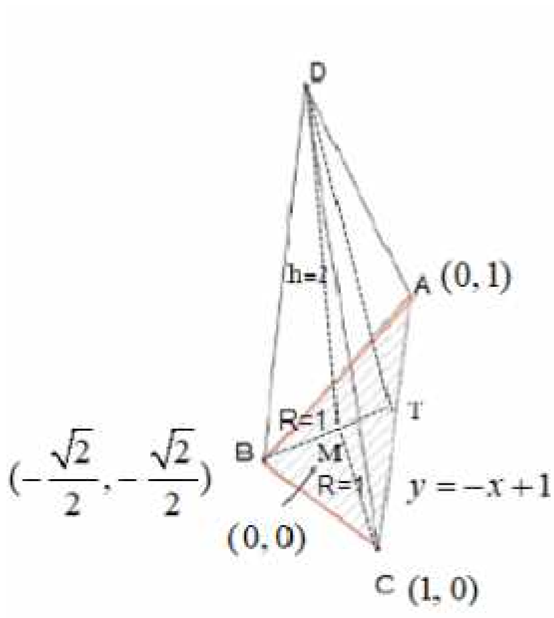
$$\boxed{MT = 0.707}$$

$\underline{\Delta DTM}$

$$\tan\sphericalangle DTM = \frac{DM}{MT} = \frac{2}{0.707}$$

$$\boxed{\sphericalangle DTM = 70.53^\circ}$$

תשובה: הזווית בין הפאה הצדדית ADC **למישור הבסיס היא בת** 70.53°**.**



א. הנקודה B **היא נקודת החיתוך של המישור** $®_1: 2x+3y+4z-12=0$ **עם ציר ה-** y **, לכן** $x_B = z_B = 0$ **.**

מכאן ששיעורי הנקודה הם: $B(0, 4, 0)$**.**

הנקודה C **היא נקודת החיתוך של המישור** $®_1: 2x+3y+4z-12=0$ **עם ציר ה-** z **, לכן** $x_C = y_C = 0$ **.**

מכאן ששיעורי הנקודה הם: $C(0, 0, 3)$**.**

$\overrightarrow{BC} = \underline{C} - \underline{B} = \underline{x} = (0,-4,3)$ **, ולכן ההצגה הפרמטרית של הישר:** $\boxed{\ell_2 = \underline{x} = (0, 4, 0) + s(0, -4, 3)}$**.**

תשובה: $\ell_2 = \underline{x} = (0, 4, 0) + s(0, -4, 3)$ **.**

ב. נתון גם הישר $\ell_1 = \underline{x} = (5, 8, -12) + t(1, 2, -3)$ **.**

קל לראות שלשני הישרים אין את אותו כיוון, ולכן הם נחתכים או מצטלבים.

נשווה שיעורי נקודות טיפוסיות.

$$x: \quad 5+t=0 \quad \to t=-5$$
$$y: \quad 8+2t=4-4s \ \to 4s=-4-2(-5) \ \to s=1.5$$
$$z: \quad -12-3t=3s \quad \to -12-3\cdot(-5)=3\cdot 1.5 \ \to 3 \neq 4.5$$

מכאן שאין נקודת חיתוך והישרים מצטלבים.

תשובה: הישרים ℓ_1 **ו-** ℓ_2 **מצטלבים.**

ג. נמצא את משוואת המישור $®_2$**, שעובר דרך הנקודה** $A(1, 0, 0)$ **ומכיל את** $\ell_2 = \underline{x} = (0, 4, 0) + s(0, -4, 3)$ **.**

גם הנקודה $B(0, 4, 0)$ **במישור, כמובן , ולכן** $\overrightarrow{BA} = \underline{A} - \underline{B} = \underline{x} = (1, -4, 0)$

ההצגה הפרמטרית של $®_2$ **היא:** $\underline{x} = (0, 4, 0) + s(0,-4,3) + r(1,-4,0)$ **,**

$$(a,b,c)\cdot(0,-4,3)=0 \quad \to -4b+3c=0 \quad \to 3c=4b \quad \to b=3, c=4$$
$$(a,b,c)\cdot(1,-4,1)=0 \quad \to a-4b=0 \quad \to a=4\cdot 3 \quad \to a=12$$
$$®_2: 12x+3y+4z+d=0$$
$$B(0, 4, 0) \quad \to 3\cdot 4+d=0 \quad \to d=-12 \quad \to \boxed{®_2: 12x+3y+4z-12=0}$$

תשובה: $®_2: 12x+3y+4z-12=0$**.**

ד. הישר $\ell_3 = \underline{x} = (12, 3, 4) + t(12, 3, 4)$ **מאונך למישור** $\ell_3 = \underline{x} = (12, 3, 4) + t(12, 3, 4)$ **,**

כי וקטור הכיוון שלו $\underline{(12, 3, 4)}$ **הוא גם וקטור המקדמים של משוואת המישור.**

הישר $\ell_3 = \underline{x} = (12, 3, 4) + t(12, 3, 4)$ **עובר בראשית הצירים, כי אם נציב בו** $t=(-1)$ **נקבל את שיעורי הראשית.**

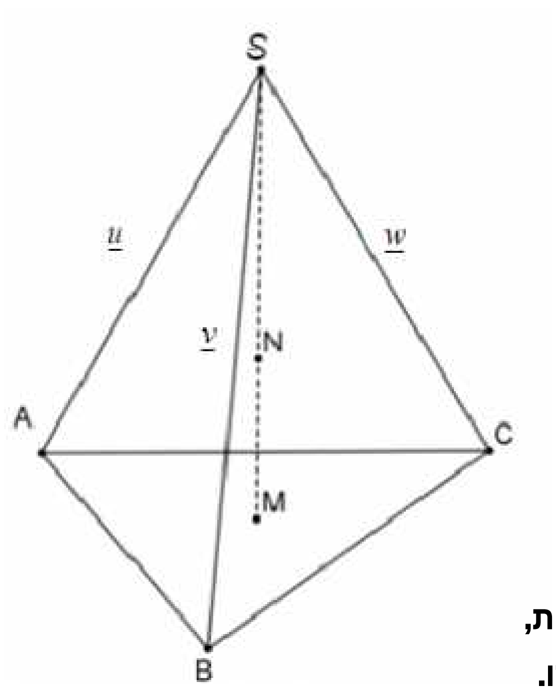
תשובה: הטענה נכונה.

א. SABC **פירמידה ישרה, שבסיסה** ABC **הוא משולש שווה צלעות.**

לכן הגובה SM **יורד למרכז מעגל חוסם, שהוא במקרה זה גם מפגש תיכונים,**

החותכים זה את זה ביחס $2:1$ **מהקדקוד.**

נסמן ב- T **את אמצע הצלע** BC**.**



$$\boxed{\overrightarrow{SA}=\underline{u}} \quad \boxed{\overrightarrow{SB}=\underline{v}} \quad \boxed{\overrightarrow{SC}=\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{SA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AT}$$

$$\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{SA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AS}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}))$$

$$\overrightarrow{SM}=\underline{u}+\frac{2}{3}(-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}++\frac{1}{2}\underline{w})$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}} \\ \boxed{\overrightarrow{SN}=\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{v}+\frac{1}{4}\underline{w}}\end{array}\right\} \boxed{\overrightarrow{SM}=\frac{4}{3}\overrightarrow{SN}}$$

לכן, הנקודה N **מחלקת את** SM **ביחס** $SM:NM=3:1$**.**

תשובה: הוכחנו שהנקודות S**,** M **ו-** N **נמצאות על ישר אחד.**

ב. (1) SABC **פירמידה ישרה, שבסיסה** ABC **הוא משולש שווה צלעות,**

ולכן כל פאותיה חופפות זו לזה, וזוויות הראש שלהן שוות זו לזו.

לכן: $\underline{u}\cdot\underline{v}=\underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{w}$ **.**

תשובה: הוכחנו.

(2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB} \quad \to \boxed{\overrightarrow{AB}=-\underline{u}+\underline{v}}$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SC} \quad \to \boxed{\overrightarrow{BC}=-\underline{v}+\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB}=\underline{w}(-\underline{u}+\underline{v})$$

$$\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\underline{u}\underline{w}+\underline{v}\underline{w}=0 \quad \leftarrow \underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{SC}\perp\overrightarrow{AB}}$$

$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{BC}=\underline{u}(-\underline{v}+\underline{w})$$

$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\underline{u}\underline{v}+\underline{u}\underline{w}=0 \quad \leftarrow \underline{u}\cdot\underline{v}=\underline{u}\cdot\underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{SA}\perp\overrightarrow{BC}}$$

תשובה: הוכחנו.

ג. נתון גם: $\underline{w}=(4\sqrt{3},4,-8)$, $\underline{v}=(0,-8,-8)$, $\underline{u}=(-4\sqrt{3},4,-8)$ **, והנקודה** $C(4\sqrt{3},4,0)$ **.** $(4\sqrt{3},4,0)$

$$\overrightarrow{SC}=\underline{w}$$
$$(4\sqrt{3},4,0)-\underline{S}=(0,-4,3)$$
$$\boxed{S(0,0,8)}$$

$$\overrightarrow{SA}=\underline{u}$$
$$\underline{A}-(0,0,8)=(-4\sqrt{3},4,-8)$$
$$\boxed{A(-4\sqrt{3},4,0)}$$

$$\overrightarrow{SB}=\underline{v}$$
$$\underline{B}-(0,0,8)=(0,-8,-8)$$
$$\boxed{B(0,-8,0)}$$

$$\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}$$
$$\overrightarrow{SM}=(0,0,-8)$$
$$\underline{M}-(0,0,8)=(0,0,-8)$$
$$\boxed{M(0,0,0)}$$

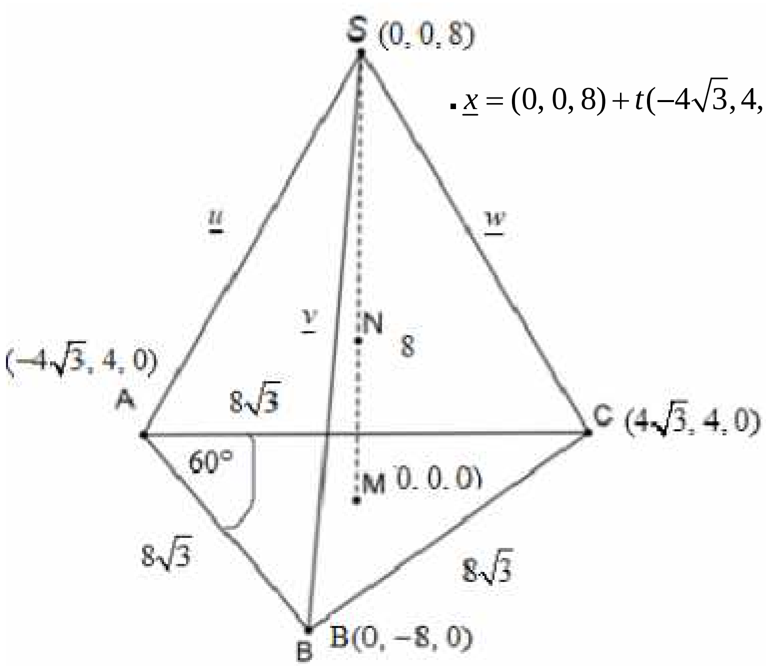
$$\left.\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}=\underline{B}-\underline{A}=\underline{x}=(4\sqrt{3},-12,0)\\&|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+(-12)^2+0^2}\\&\boxed{AB=8\sqrt{3}}\end{aligned}\right\} S_{\Delta ABC}=\frac{(8\sqrt{3})^2\sin 60^\circ}{2}\rightarrow\boxed{S_{\Delta ABC}=48\sqrt{3}}$$

$$\overrightarrow{SM}=\underline{x}=(0,0,-8)$$
$$\boxed{SM=8}$$
$$V_{SABC}=\frac{48\sqrt{3}\cdot 8}{3}\rightarrow\boxed{V_{SABC}=128\sqrt{3}}$$

תשובה: $S(0,0,8)$ **,** $A(-4\sqrt{3},4,0)$ **,** $B(0,-8,0)$ **,** $M(0,0,0)$ **(ראשית הצירים),** $V_{SABC}=128\sqrt{3}$**.**

ד. מישור ABS **נפרש על ידי** $\underline{u}$ **ו-** $\underline{v}$**.**

ההצגה הפרמטרית של המישור היא: $\underline{x}=(0,0,8)+t(-4\sqrt{3},4,-8)+s(0,-8,-8)$ **.**



$$(a,b,c)\cdot(-\sqrt{3},1,-2)=0 \quad\rightarrow -a\sqrt{3}+b-2c=0$$
$$(a,b,c)\cdot(0,1,1)=0 \quad\rightarrow b+c=0 \quad\rightarrow c=1 \quad\rightarrow b=-1$$
$$-a\sqrt{3}-1-2=0 \quad\rightarrow a=-\sqrt{3}$$
$$®_{\Delta ABS}:\sqrt{3}x+y-z+d=0$$
$$S(0,0,8) \quad\rightarrow -8+d=0 \quad\rightarrow d=8$$
$$\boxed{®_{\Delta ABS}:\sqrt{3}x+y-z+8=0}$$

תשובה: משוואת מישור ABS **היא** $\sqrt{3}x+y-z+8=0$ **.**

א. נתונה משפחת הפונקציות $f(x)=\frac{(\ell n\,(x))^n}{x}$, ($n>1$ מספר טבעי).

תחום ההגדרה הוא $x>0$ (בגלל הארגומנט של הפונקציה הלוגריתמית, וגם על מנת לא לאפס מכנה).

כאשר $x\to 0$ המונה שואף ל- $\pm\infty$ ואילו המכנה שואף ל- 0 (חיובי),

לכן בכל מקרה נקבל את הישר $x=0$ כאסימפטוטה אנכית.

נמצא נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

$$0=\frac{(\ell n\,(x))^n}{x}$$

$$\ell n\,(x)=0$$

$$x=1 \quad \to \boxed{(1,0)}$$

תשובה: תחום הגדרה: $x>0$, אסימפטוטה אנכית: $x=0$, נקודת חיתוך עם ציר ה- x : $(1,0)$.

ב. כאשר n מספר זוגי, הפונקציה תהייה אי-שלילית, ולכן $(1,0)$ בהכרח נקודת מינימום.

כאשר $x\to\infty$ המכנה וגם המונה שואפים ל- ∞ , אלא שהמכנה שואף "מהר יותר",

לכן תהייה בהכרח אסימפטוטה אופקית $y=0$, מה שמבטיח קיומה של נקודת מקסימום.

עדיין חייבים לגזור את הפונקציה, על מנת לראות האם יש יותר מנקודת קיצון אחת, או שתיים.

$$\boxed{f(x)=\frac{(\ell n\,(x))^n}{x}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{n(\ell n\,(x))^{n-1}\cdot x}{x}-(\ell n\,(x))^n}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{(\ell n\,(x))^{n-1}(n-\ell n\,(x)}{x^2}}$$

$$(\ell n\,(x))^{n-1}=0 \quad \to \ell n\,(x)=0 \quad \to x=1 \quad \to \boxed{(1,0)}$$

$$n-\ell n\,(x)=0 \quad \to \ell n\,(x)=n \quad \to x=e^n,\ \max$$

מכאן, על פי ההסבר הקודם, יש הבדלים בהתאם לזוגיות של הפרמטר.

כאשר n מספר זוגי, הפונקציה תהייה אי-שלילית, ולכן $(1,0)$ בהכרח נקודת מינימום.

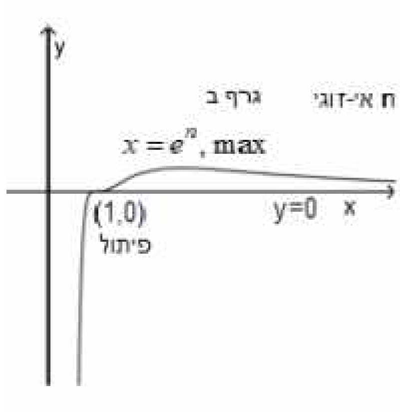
כאשר n מספר אי-זוגי, הרי שעבור $x\to 0$, מתקבל ש- $f(x)\to -\infty$ והנקודה $(1,0)$ היא נקודת פיתול.

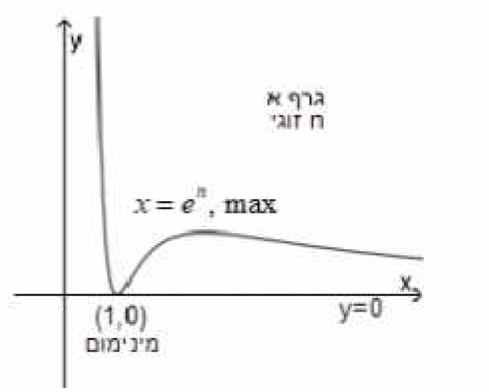
ניתן לראות גם, שעבור n מספר אי-זוגי, מתקבל ש- $n-1$ מספר זוגי,

ולכן הביטוי האלגברי $(\ell n\,(x))^{n-1}$ אינו מחליף סימן בנקודה $(1,0)$ ומכאן שהיא נקודת פיתול.

תשובה: עבור n טבעי זוגי מתקבלות שתי נקודות קיצון, ועבור n טבעי אי-זוגי מתקבלת רק נקודת קיצון אחת.

ג. על פי כל ההסברים, שניתנו בסעיף הקודם, אלו הגרפים המתאימים.





תשובה: עבור n טבעי זוגי, גרף א'.

עבור n טבעי אי- זוגי, גרף ב'.

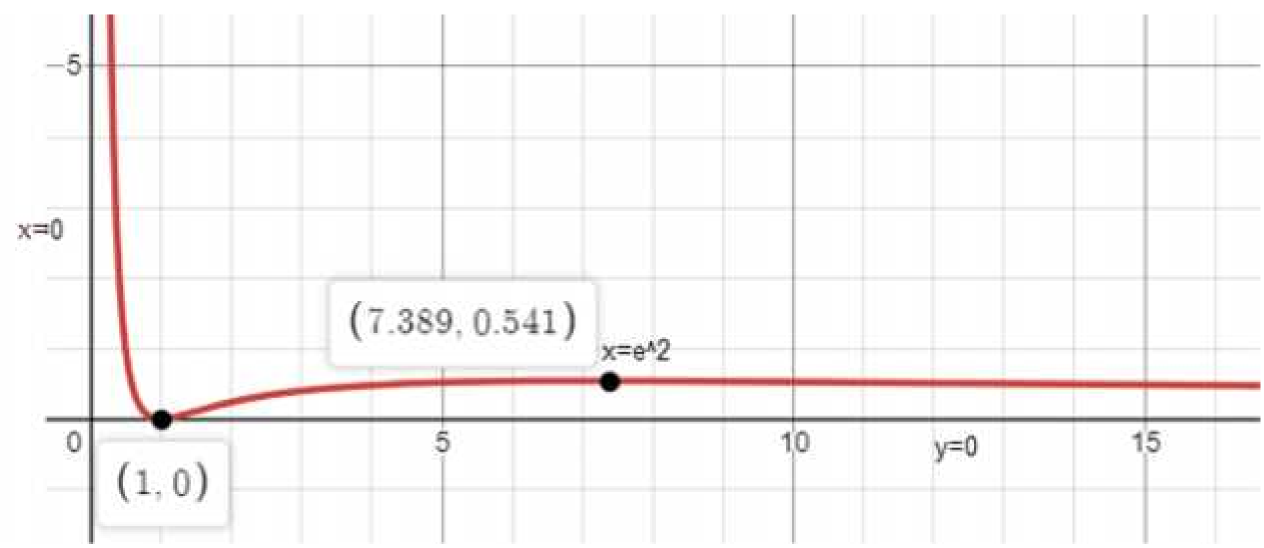
ד. נתונה הפונקציות $k(x)=\frac{(\ell n(\frac{1}{x}))^2}{x}$ **, ו-** $l(x)=\frac{(\ell n(\frac{1}{x}))^3}{x}$ **.**

תחום ההגדרה הוא $x>0$ **(בגלל הארגומנט של הפונקציה הלוגריתמית, וגם על מנת לא לאפס מכנה).**

נפתח את הביטוי הלוגריתמי שבמונה: $\ell n(\frac{1}{x})=\ell n(x^{-1})=-\ell n(x)$ **.**

בהתאם: $\boxed{k(x)=\frac{(\ell n(x))^2}{x}} \rightarrow \frac{(-\ell n(x))^2}{x}=\frac{(\ell n(\frac{1}{x}))^2}{x}=k(x)$ **, כמו** $f(x)=\frac{(\ell n(x))^n}{x}$ **עבור n טבעי זוגי.**

הגרף המתאים הוא:



וגם: $\boxed{l(x)=-\frac{(\ell n\,(x))^3}{x}}\;\rightarrow\; \frac{(-\ell n\,(x))^3}{x}=\frac{(\ell n\,(\frac{1}{x}))^3}{x}=l(x)$ **,**

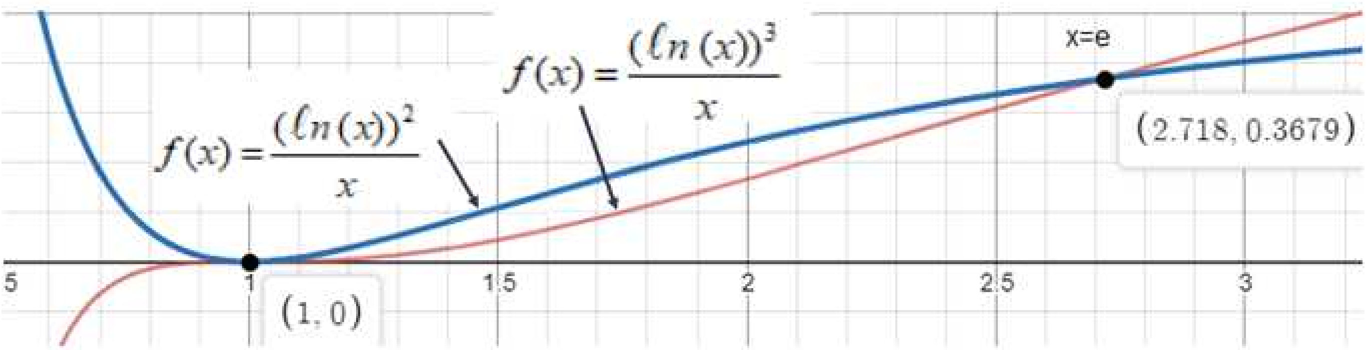
עם ציר ה- x **כקו השיקוף (הסימטרי) לגרף של** $f(x)=\frac{(\ell n\,(x))^n}{x}$ **עבור** n **טבעי אי-זוגי.**

הגרף המתאים הוא:

ה. הפונקציות $g(x)=\frac{(\ell n\,(x-1))^2}{x-1}$ **, ו-** $h(x)=\frac{(\ell n\,(x-1))^3}{x-1}$ **.**

הן הזזות של 1 **יחידה ימינה של** $f(x)=\frac{(\ell n\,(x))^2}{x}$ **(** n **זוגי, כמו** $k(x)$ **) ו-** $f(x)=\frac{(\ell n\,(x))^3}{x}$ **(** n **אי-זוגי) .**

לכן השטח ביניהן, זהה בגודלו לשטח שבין הפונקציות "המקוריות".



$$\frac{(\ell n\,(x))^2}{x}=\frac{(\ell n\,(x))^3}{x}$$
$$\ell n\,(x)=0\rightarrow x=1$$
$$\ell n\,(x)=1\rightarrow x=e$$

נחשב את האינטגרל, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$S=\int_1^e\left(\frac{(\ell n\,(x))^2}{x}-\frac{(\ell n\,(x))^3}{x}\right)\,dx=\int_1^e\left((\ell n\,x)^2\cdot\frac{1}{x}-(\ell n\,x)^3\cdot\frac{1}{x}\right)\,dx$$

$$S=\frac{(\ell n\,x)^3}{3}-\frac{(\ell n\,x)^4}{4}\Big]_1^e=(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})-(0-0)=\frac{1}{12}$$

תשובה: גודל השטח הוא $\frac{1}{12}$ **.**

נכתב ע"י עפר ילין

א. נתון גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\ell n^2x+a^2}{\ell n^2x-a^2}$ **,** $(a>0)$**.**

(1) תחום ההגדרה הוא $x>0$ **(בגלל הארגומנט של הפונקציה הלוגריתמית),**

ובנוסף $\ell n^2x-a^2\neq 0 \ \to \ell n^2x\neq a^2 \ \to \ell n\, x\neq \pm a \ \to x\neq e^a, e^{-a}$ **(על-מנת שלא לאפס את המכנה).**

לסיכום, תחום ההגדרה הוא: $x\neq e^a, e^{-a}$ **,** $x>0$ **.**

מכאן שהישרים $x=e^{-a}, x=e^a$ **אסימפטוטות אנכיות, כמתואר בציור (** $a>0$ **, לכן** $x=e^a$ **היא הימנית מהשתיים).**

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ell n^2x+a^2}{\ell n^2x-a^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ell n^2x}{\ell n^2x}=1$ **ומכאן נקודת אי הרציפות הסליקה ("חור")** $(0,1)$ **, שבציור.**

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ell n^2x+a^2}{\ell n^2x-a^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ell n^2x}{\ell n^2x}=1$ **ומכאן ש-** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית, לימין, של גרף הפונקציה.**

תשובה: $x=e^{-a}, x=e^a$ **אסימפטוטות אנכיות,** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

(2) נמצא את שיעורי הנקודה A **, נקודת המקסימום של הפונקציה.**

$$\boxed{f(x)=\frac{\ell n^2x+a^2}{\ell n^2x-a^2}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{2\ell n\, x}{x}\cdot(\ell n^2x-a^2)-\frac{2\ell n\, x}{x}\cdot(\ell n^2x+a^2)}{(\ell n^2x-a^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2\ell n\, x\left[\ell n^2x-a^2-(\ell n^2x+a^2)\right]}{x(\ell n^2x-a^2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-4a^2\ell n\, x}{x}}$$

$$\ell n\, x=0 \ \to x=1 \ \to y=\frac{\ell n^2 1+a^2}{\ell n^2 1-a^2}=\frac{a^2}{-a}=-1 \ \to \boxed{\mathrm{A}(1,-1)}$$

תשובה: $\mathrm{A}(1,-1)$ **(אין צורך להוכיח את קיום הקיצון וסוגו, שכן הגרף נתון כבר מראש).**

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{\ell n^2x-a^2}{\ell n^2x+a^2}$ **,** ($a>0$)**.**

תחום ההגדרה הוא $x>0$ **(בגלל הארגומנט של הפונקציה הלוגריתמית).**

כיוון שלא נכתב $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ **אז תחום ההגדרה הוא חדש, ולא מושתת על זה של** $f(x)$ **,**

ובמקום שהיו אסימפטוטות אנכיות של $f(x)$ **, תהיינה נקודות חיתוך עם ציר ה-** x **:** $(e^a,0)$, $(e^{-a},0)$**.**

האסימפטוטה האופקית ללא שינוי, $y=1$ **אסימפטוטה אופקית לימין, כי המנה** $\frac{\ell n^2x}{\ell n^2x}$ **היא הקובעת,**

וכנ"ל גם באשר לנקודת אי הרציפות הסליקה $(0,1)$**.**

כמו כן, באופן טבעי, כאשר $f(x)$ **עולה, אז** $\frac{1}{f(x)}$ **יורדת ולהפך, ונקודת המקסימום תהפוך למינימום.**

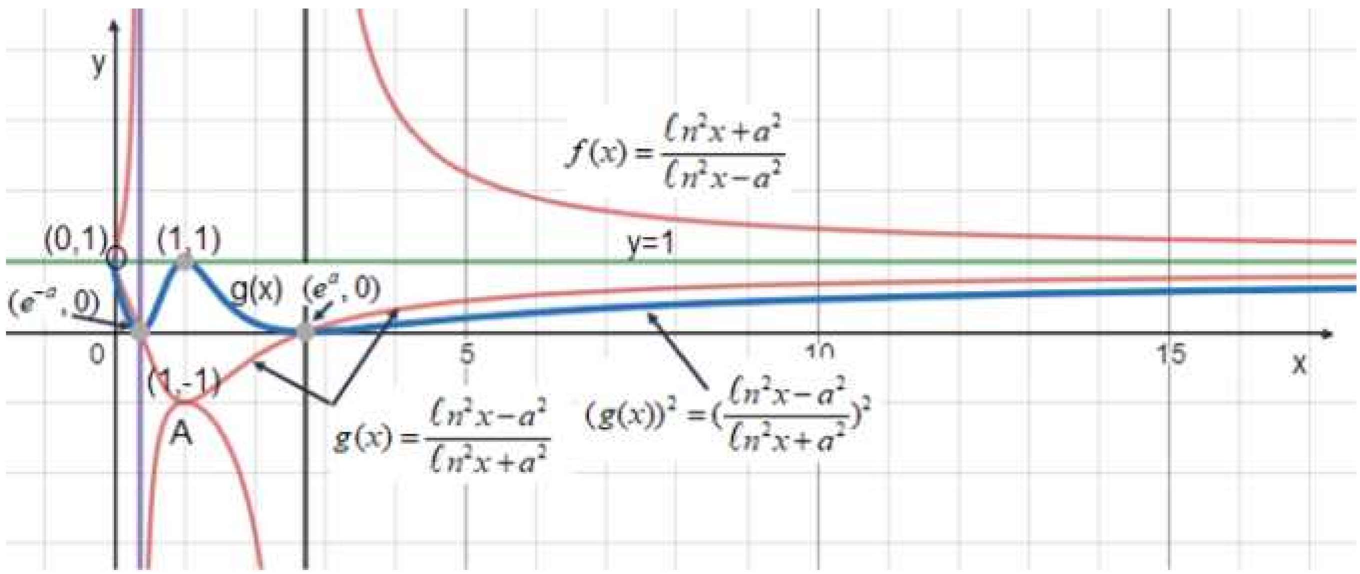
ניתן לראות זאת גם על פי השתנות סימני הנגזרת: $g'(x)=(\frac{1}{f(x)})'=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$ **.**

נתונה הפונקציה $(g(x))^2=(\frac{\ell n^2x-a^2}{\ell n^2x+a^2})^2$ **,** ($a>0$)**, שבה ערכי הפונקציה השליליים** $g(x)$ **יהפכו לחיוביים,**

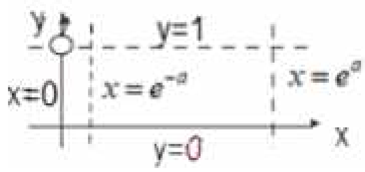
ולכן יתהפכו תחומי העלייה והירידה, כאשר $g(x)<0$ **,**

וניתן לראות זאת גם על ידי השתנות סימני הנגזרת (עבור $g(x)<0$ **):** $(g^2(x))'=2\underset{(-)}{\boxed{g(x)}}\,g'(x)$ **.**

עוד פינה קטנה: כאשר $0<g(x)<1$ **אז** $0<g^2(x)<g(x)<1$**.**



ג. נחשב את שטח המלבן ונשווה ל- e **.**



$$(e^{a}-e^{-a})(1-0)=e$$

$$e^{a}-\frac{1}{e^{a}}=e$$

$$t-\frac{1}{t}=e \quad \leftarrow \boxed{e^{a}=t}$$

$$t^{2}-et-1=0$$

$$t=3.047 \quad \rightarrow e^{a}=3.047 \quad \rightarrow a=\ell n\,3.047 \quad \rightarrow \boxed{a=1.14}$$

$$t=-0.3282 \quad \rightarrow e^{a}=0.3282 \quad \rightarrow no\ solution$$

תשובה: $a=1.14$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=e^x\cdot\sqrt[3]{x^2}$ **.**

(1) תחום ההגדרה הוא כל x **.**

(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה ואת נקודות הקיצון.

נשים לב לכך שהפונקציה אי-שלילית, ולכן יש מינימום בראשית הצירים.

$$f(x)=e^x\cdot x^{\frac{2}{3}}\quad\rightarrow f'(x)=e^x\cdot x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}e^x\cdot x^{-\frac{1}{3}}$$

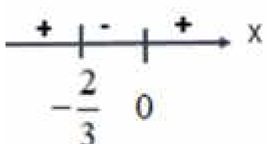
$$f'(x)=e^x\cdot x^{-\frac{1}{3}}(x+\frac{2}{3})\quad\rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{e^x(x+\frac{2}{3})}{\sqrt[3]{x}}}$$

נשים לב לכך שהמכנה מתאפס עבור $x=0$ **(שלא מאפס את המונה), ולכך יש שלוש משמעויות:**

(א) בגרף הפונקציה יהיה שפיץ עבור $x=0$ **(בראשית הצירים) (ב)** $x=0$ **א. אנכית של גרף הנגזרת**

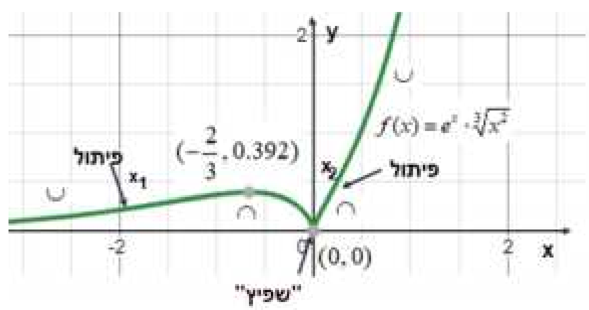
(ג) $f'(x)$ **נשים לב לסימני המכנה בעת קביעת סימני הנגזרת, לצורכי תחומי עלייה וירידה וקיצון.**

המונה מתאפס עבור $x=-\frac{2}{3}$ **. סימני הנגזרת הם:**



תשובה: עלייה $x>0$ **או** $x<-\frac{2}{3}$ **, ירידה** $-\frac{2}{3}<x<0$ **.** $(0,0)$ **מינימום,** $(-\frac{2}{3},0.392)$ **מקסימום.**

(3) עבור $x\to-\infty$ **נקבל ש-** e^x **שואף ל-**0 **מהר יותר מאשר** $\sqrt[3]{x^2}$ **שואף ל-** $+\infty$ **ו-**$y=0$ **א. אופקית לשמאל.**

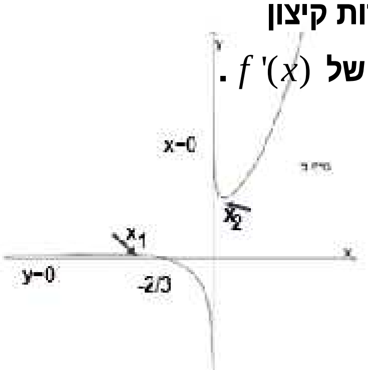


(4) הסברנו כבר את קיומה של $x=0$ **אסימפטוטה אנכית של גרף הנגזרת** $f'(x)$ **, ואת סימני הנגזרת.**

שיקולים נוספים לגרף הנגזרת:

(א) שתי נקודות הפיתול, המוצבעות בסרטוט, מלמדות על קיומן של שתי נקודות קיצון בגרף $f'(x)$ **, ותחומי הקעירויות (מעלה ומטה) מלמדים על עלייה וירידה של** $f'(x)$ **.**

(ב) קיומה של אסימפטוטה אופקית לשמאל, בגרף של $f(x)$ **,**
מלמדת על שיפועים השואפים ל- 0 **,**



ולכן לגרף של $f'(x)$ **יש אסימפטוטה אופקית לשמאל** $y=0$ **.**

תשובה: גרף ב'.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=e^x\cdot\sqrt[3]{x}$ **.**

(1) תחום ההגדרה הוא כל x **.**

(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה ואת נקודות הקיצון.

נשים לב לכך שהפונקציה חיובית כאשר $x>0$ **, ושלילית עבור** $x<0$ **והפונקציה עוברת בראשית הצירים.**

$$g(x)=e^x\cdot x^{\frac{1}{3}}\quad\to g'(x)=e^x\cdot x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}e^x\cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

$$g'(x)=e^x\cdot x^{-\frac{2}{3}}(x+\frac{1}{3})\quad\to \boxed{g'(x)=\frac{e^x(x+\frac{1}{3})}{\sqrt[3]{x^2}}}$$

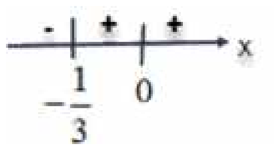
נשים לב לכך שהמכנה מתאפס עבור $x=0$ **(שלא מאפס את המונה), ולכך יש שלוש משמעויות:**

(א) בראשית הצירים הפונקציה עוברת משליליות לחיוביות, ומכיוון והנגזרת אינה מוגדרת,

הרי שהישר $x=0$ **(ציר ה-** y **) הוא המשיק לגרף הפונקציה !!! , והגרף של** $f(x)$ **יעבור בראשית כמעט**

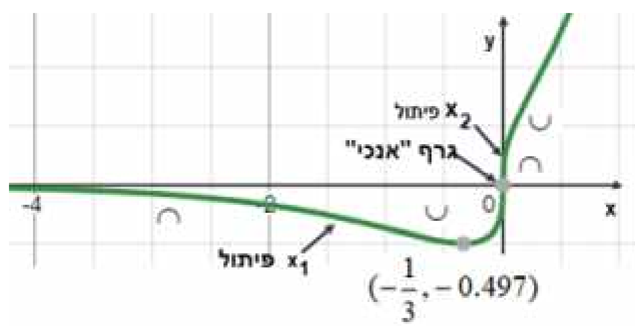
"אנכית" (ב) א. אנכית של גרף הנגזרת $f'(x)$ **, (ג) סימני המכנה, במקרה זה, חיובים לכל** $x\neq 0$ **.**

המונה מתאפס עבור $x=-\frac{1}{3}$ **. סימני הנגזרת הם:**



תשובה: עלייה $x>-\frac{1}{3}$ **ירידה** $x<-\frac{1}{3}$ **.** $(-\frac{1}{3},-0.497)$ **מינימום.**

(3) עבור $x\to-\infty$ **נקבל ש-** e^x **שואף ל-** 0 **מהר יותר מאשר** $\sqrt[3]{x}$ **שואף ל-** $+\infty$ **ו-** $y=0$ **א. אופקית לשמאל.**

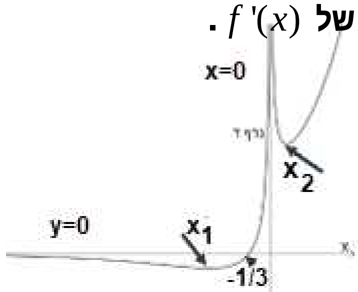


(4) הסברנו כבר את קיומה של $x=0$ **אסימפטוטה אנכית של גרף הנגזרת** $f'(x)$ **, ואת סימני הנגזרת.**

שיקולים נוספים לגרף הנגזרת:

(א) שתי נקודות הפיתול, המוצבעות בסרטוט, מלמדות על קיומן של שתי נקודות קיצון

בגרף $f'(x)$ **, ותחומי הקעירויות (מעלה ומטה) מלמדים על עלייה וירידה של** $f'(x)$ **.**



(ב) קיומה של אסימפטוטה אופקית לשמאל, בגרף של $f(x)$ **,**

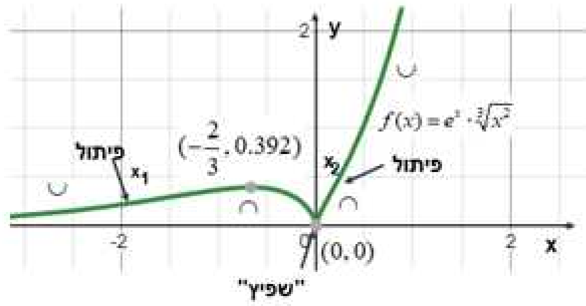
מלמדת על שיפועים השואפים ל- 0 **,**

ולכן לגרף של $f'(x)$ **יש אסימפטוטה אופקית לשמאל** $y=0$ **.**

תשובה: גרף ד'.

ג. נתונה הפונקציה $h(x)=\frac{1}{e^{f(x)}}$.

ניעזר בגרף של $f(x)$ **.**



אסימפטוטה אופקית קיימת כאשר ערכי y **שואפים למספר מסוים, כאשר** $x\to\pm\infty$ **.**

כאשר $x\to+\infty$ **, ניתן לראות ש-** $f(x)\to+\infty$ **, ובהתאם גם** $e^{f(x)}\to+\infty$ **.**

לכן, כאשר $x\to+\infty$ **, מתקיים** $h(x)=\frac{1}{e^{f(x)}}\to\frac{1}{+\infty}\to0$ **ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

כאשר $x\to-\infty$ **, ניתן לראות ש-** $f(x)\to+0$ **, ובהתאם גם** $e^{f(x)}\to e^0\to1$ **.**

לכן, כאשר $x\to-\infty$ **, מתקיים** $h(x)=\frac{1}{e^{f(x)}}\to\frac{1}{1}\to1$ **ו-** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

תשובה: $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין ,** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

א. נציב את הנתונים בטבלה, לשם הנוחות והארגון.

	כלי א	כלי ב
כמות ראשונית (חיידקים) - M_0	K	$5K$
קצב גידול - q	a	$(g(x)=g(0)b^x) \quad \to b$
זמן שעובר (שעות) - t	3	3
כמות לאחר זמן מסוים - M_t	$L=Ka^3$	$\frac{5}{8}L=5Kb^3$

נפתור את המשוואה המתאימה

$$5Kb^3=\frac{5}{8}Ka^3 \quad /:\frac{K}{8}>0$$

$$8b^3=a^3$$

$$\boxed{a=2b}$$

נחשב לאחר כמה שעות (t) , מאז המדידה הראשונה היה מספר זהה של חיידקים בשתי התרביות.

$$5Kb^t=Ka^t \quad /:K>0$$

$$5b^t=(2b)^t \quad \leftarrow a=2b$$

$$5b^t=2^t b^t \quad /:b^t>0$$

$$5=2^t$$

$$\boxed{t=\log_2 5\approx 2.322}$$

תשובה: כעבור $\log_2 5\approx 2.322$ **שעות היה מספר זהה של חיידקים בשתי התרביות.**

ב. נבטא את הפונקציות המקשרות בין הזמן (x) **לבין מספר החיידקים בכל כלי.**

(1) בכלי א' - $f(x)=K\cdot(2b)^x$ **.**

(2) בכלי ב' - $g(x)=5K\cdot b^x$ **.**

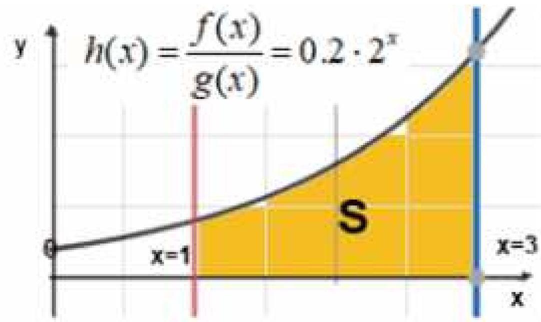
ג. נתונה הפונקציה $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

$$h(x)=\frac{K\cdot(2b)^x}{5K\cdot b^x}=\frac{2^x\cdot b^x}{5\cdot b^x}$$

$$\boxed{h(x)=0.2\cdot 2^x}$$

כיוון שמספר החיידקים בכלי א' גדל במהירות גבוהה מזו של מספר החיידקים בכלי ב',

קבלנו פונקציה שעולה, לכל x **, ובפרט עבור** $x>0$ **(שהוא תחום ההגדרה, הנתון בשאלה) .**



$$S=\int_1^3(0.2\cdot 2^x-0)\,dx$$

$$S=\frac{0.2\cdot 2^x}{\ell n\,2}\Big]_1^3$$

$$\left.\begin{aligned}x=3:\quad \frac{0.2\cdot 2^3}{\ell n\,2}=\frac{1.6}{\ell n\,2}\\ x=1:\quad \frac{0.2\cdot 2^1}{\ell n\,2}=\frac{0.4}{\ell n\,2}\end{aligned}\right\}S=\frac{1.6}{\ell n\,2}-\frac{0.4}{\ell n\,2}=\boxed{\frac{1.2}{\ell n\,2}\approx 1.731}$$

תשובה: גודל השטח הוא $\frac{1.2}{\ell n\,2}\approx 1.731$ **יח"ר.**