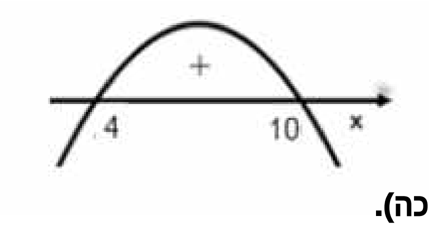
א. נתונה הפונקציה $f(x)=m\cdot\sqrt{-x^2+14x-40}$ **,** $m>0$ **פרמטר.**



(1) הביטוי שבתוך השורש צריך להיות אי-שלילי.

$$-x^2+14x-40\geq 0$$
$$x=4,\ x=10$$

מתקבל ביטוי שהגרף שלו הוא פרבולה הפוכה, בעלת מקסימום (בוכה).

תשובה: תחום ההגדרה: $4\leq x\leq 10$ **.**

(2) בנקודות החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים:** $y=0$ **(אין נקודות חיתוך עם ציר** x **, כי** $x=0$ **לא בתחום ההגדרה).**

$$0=m\cdot\sqrt{-x^2+14x-40}$$
$$0=-x^2+14x-40$$
$$\boxed{(4,0)\ ,\quad (10,0)}$$

תשובה: $(4,0)\ ,\quad (10,0)$ **.**

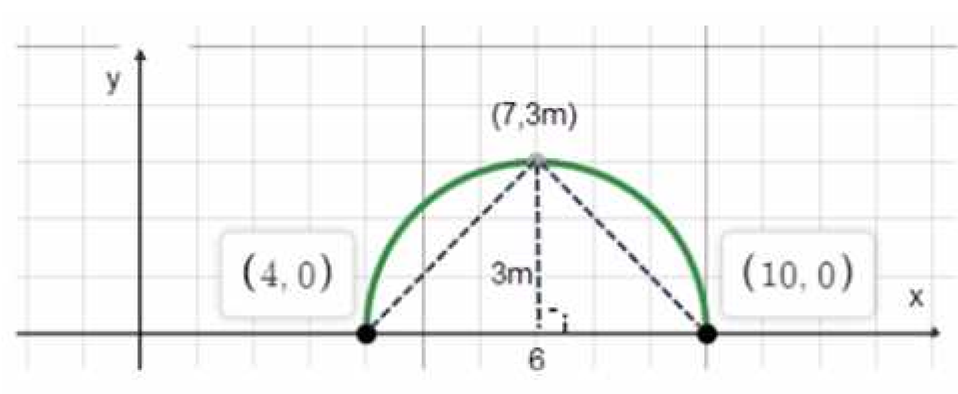
(3) נקודות קצה: $(4,0)\ ,\quad (10,0)$ **, שתהיינה נקודות מינימום, כי הפונקציה אי-שלילית.**

$$f'(x)=m\cdot\frac{-2x+14}{2\sqrt{-x^2+14x}-40}$$
$$0=-2x+14$$
$$x=7\quad\to y=m\cdot\sqrt{-7^2+14\cdot7-40}=3m\quad\to\boxed{(7,3m)}$$

ועל פי ערכי הפונקציה בקצוות ניתן לקבוע את סוגי הקיצון.

תשובה: $(7,3m)$ **מקסימום (מוחלט, פנימי),** $(4,0)\ ,\quad (10,0)$ **מינימום (מוחלט, קצה).**

ב. הסקיצה המתאימה, כולל סימון המשולש עבור סעיף ג.



ג. שטחו של המשולש המסומן הוא 18 **יח"ר.**

$$\frac{6\cdot 3m}{2}=18\quad\to\boxed{m=2}$$

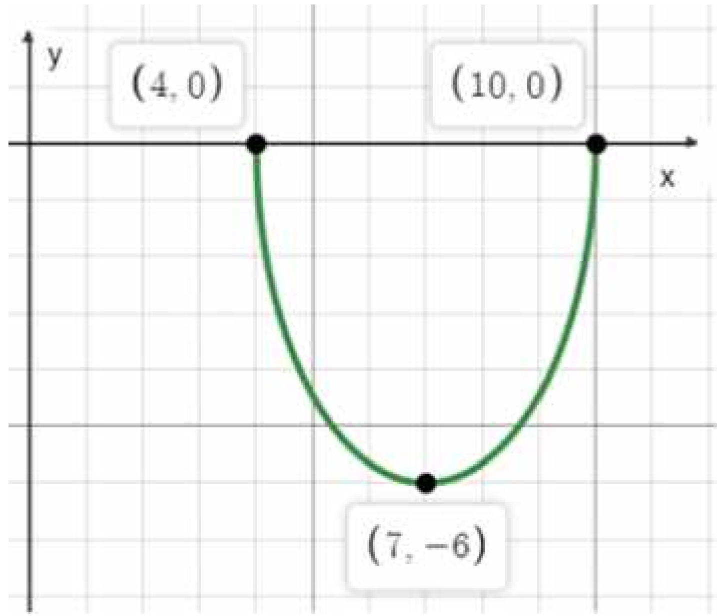
תשובה: $m=2$ **.**

ד. $g(x)=-f(x)$ **, ולכן ציר ה-** x **הוא ציר הסימטריה של שתי הפונקציות.**

נקודת המקסימום, עבור $m=2$**, של** $f(x)$ **היא** $(7,6)$**,**

ולכן שיעורי נקודת המינימום של $g(x)$ **הם** $(7,-6)$ **.**

ניתן לראות גם כך: $g'(x)=-f'(x)$ **, ולכן תחומי עלייה וירידה, וסוג נקודות הקיצון מתהפך.**



ה. נתונה הפונקציה $h(x)=-f(x)+b$**, כלומר** $h(x)=g(x)+b$**.**

על-מנת שהגרף של הפונקציה החדשה ישיק לציר ה- x **, יש להעלות אותה** 6 **יחידות כלפי מעלה.**

לכן: $+b=6$ **, ומכאן ש-** $b=6$**.**

תשובה: $b=6$**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2\cdot\sqrt{b-x}$ **,** $b>0$ **פרמטר.**

$$f'(x)=2x\sqrt{b-x}+x^2\cdot\frac{-1}{2\sqrt{b-x}}$$

$$f'(0)=2\cdot 0\sqrt{b-0}+0^2\cdot\frac{-1}{2\sqrt{b-0}}$$

$$f'(0)=0 \quad o.k.$$

$b>0$ **לכן הנגזרת מוגדרת, עבור** $x=0$ **.**

הוכחנו.

ב. נתון כי יש קיצון פנימי עבור $x=4$ **, ולכן** $f'(4)=0$ **.**

$$0=2\cdot 4\sqrt{b-4}+4^2\cdot\frac{-1}{2\sqrt{b-4}}$$

$$0=8(b-4)-8 \quad /:8$$

$$0=b-4-1$$

$$\boxed{b=5}$$

תשובה: $b=5$**.**

ג. נציב $b=5$ **והפונקציה היא** $f(x)=x^2\cdot\sqrt{5-x}$ **.**

(1) הביטוי שבתוך השורש צריך להיות אי-שלילי.

$$5-x\ge 0$$

$$\boxed{x\le 5}$$

תשובה: תחום ההגדרה: $x\le 5$ **.**

(3) בנקודות החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים:** $y=0$ **.**

$$0=x^2\cdot\sqrt{5-x}$$

$$x^2=0 \quad \to x=0 \quad \to (0,0)$$

$$\sqrt{5-x}=0 \quad \to 5-x=0 \quad \to x=5 \quad \to (5,0)$$

וקבלנו גם את נקודת החיתוך עם ציר ה- y **, את** $(0,0)$ **.**

תשובה: $(5,0)$ **,** $(0,0)$**.**

(2,4) נקודת קצה: $(5,0)$ **, שתהייה נקודת מינימום, כי הפונקציה אי-שלילית.**

$$f'(x)=2x\sqrt{5-x}+x^2\cdot\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}$$

$$f'(x)=\frac{4x(5-x)-x^2}{2\sqrt{5-x}}$$

$$f'(x)=\frac{20x-4x^2-x^2}{2\sqrt{5-x}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-5x^2+20x}{2\sqrt{5-x}}}$$

$$0=-5x^2+20x$$

$$0=5x(-x+4)$$

$$x=0 \quad \to (0,0)$$

$$x=4 \quad \to f(4)=4^2\cdot\sqrt{5-4}=16 \quad \to (4,16)$$

נמצא את סוגי נקודות הקיצון, בהתאם לטבלת עלייה וירידה, על פי ערכי הפונקציה והנגזרת.

נשים לב שהמכנה חיובי (עבור $x<5$ **).**

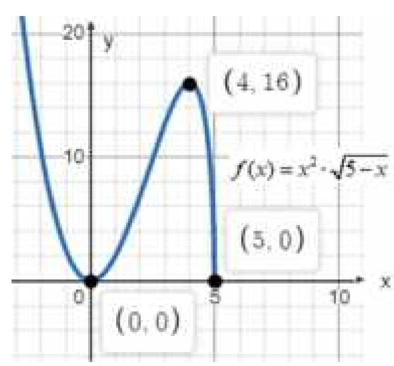
$$f'(-1)=\frac{-}{+}<0 \quad , \quad f'(1)=\frac{+}{+}>0 \quad , \quad f'(4.5)=\frac{-}{+}<0$$

x		0		4		5
$f(x)$		0		16		0
$f'(x)$	-	0	+		-	
מסקנה	↘	Min	↗	Max	↘	

תשובה (2): $(5,0)$ **מינימום ,** $(4,16)$ **מקסימום,** $(0,0)$ **מינימום.**

תשובה (4): עלייה: $0<x<4$ **, ירידה:** $4<x<5$ **או** $x<0$ **.**

ד. הסקיצה המתאימה.



ד. $f(x)-k$ **היא הזזה אנכית כלפי מטה, עבור** $k>0$ **, של** $f(x)$ **.**

על מנת לקבל רק נקודת חיתוך אחת עם ציר ה- x **, יש להוריד את הגרף מעל** 16 **יחידות,**

כך שנקודת המקסימום תהיה מתחת לציר ה- x**.**

תשובה: $k>16$ **.**

ד. שיקולים לבחירת גרף הנגזרת, $f'(x)$ הגרף של $f'(x)=\frac{-5x^2+20x}{2\sqrt{5-x}}$ **.**

(1) תחום ההגדרה שלה הוא $x<5$ (כי $x=5$ מאפס את המכנה של הנגזרת).

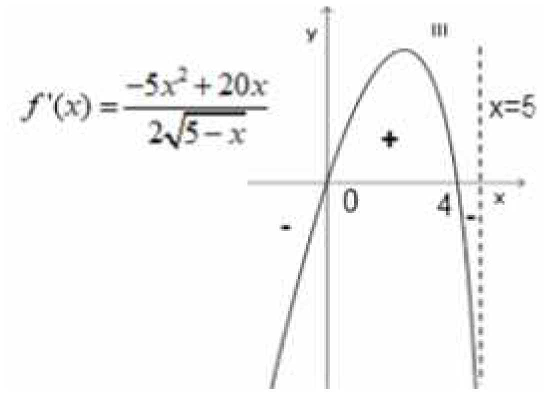
(2) $f'(x)$ אינה מוגדרת עבור $x=5$, והישר $x=5$ מהווה אסימפטוטה אנכית.

(3) חזקת המונה (2) גדולה מחזקת המכנה $(\frac{1}{2})$, ולכן אין אסימפטוטה אופקית.

(4) נקודות האפס של $f'(x)$ הן : $(4, 0)$ ו- $(0, 0)$.

(5) תחומי החיוביות של $f'(x)$, תואמים לתחומי העלייה של $f(x)$: $0<x<4$.

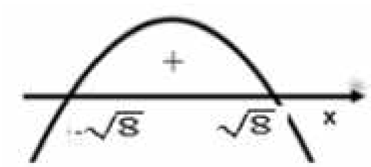
(6) תחומי השליליות של $f'(x)$, תואמים לתחומי הירידה של $f(x)$: $4<x<5$ או $x<0$.



תשובה: גרף III .

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2x\cdot\sqrt{8-x^2}$ **פונקציה אי-זוגית, סימטרית לראשית הצירים.**

הביטוי שבתוך השורש צריך להיות אי-שלילי.



$8-x^2\ge 0$

$x=-\sqrt{8},\ x=\sqrt{8}$

מתקבל ביטוי שהגרף שלו הוא פרבולה הפוכה, בעלת מקסימום (בוכה).

תשובה: תחום ההגדרה: $-\sqrt{8}\le x\le\sqrt{8}$ **.**

ב. בנקודות החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים:** $y=0$ **.**

$$0=2x\cdot\sqrt{8-x^2}$$

$$2x=0 \quad\to x=0 \quad\to(0,0)$$

$$\sqrt{8-x^2}=0 \quad\to 8-x^2=0 \quad\to x=\pm\sqrt{8-x^2} \quad\to(-\sqrt{8},0),(\sqrt{8},0)$$

וקבלנו גם את נקודת החיתוך עם ציר ה- y **, את** $(0,0)$ **.**

תשובה: $(\sqrt{8},0)$ **,** $(0,0)$ **,** $(-\sqrt{8},0)$**.**

ג. ד. נקודת קצה: $(\sqrt{8},0)$ **,** $(-\sqrt{8},0)$ **, שתהיינה נקודות קיצון.**

$$f'(x)=2\sqrt{8-x^2}+2x\cdot\frac{-\not{2}x}{\not{2}\sqrt{8-x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{2(8-x^2)-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{16-2x^2-2x^2}{2\sqrt{8-x^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-4x^2+16}{2\sqrt{8-x^2}}}$$

.

$$0=-4x^2+16 \quad /:4$$

$$x^2=4$$

$$x=2 \quad\to f(2)=2\cdot2\sqrt{8-2^2}=8 \quad\to\boxed{(2,8)}$$

$$x=-2 \quad\to f(-2)=2\cdot(-2)\sqrt{8-(-2)^2}=-8 \quad\to\boxed{(-2,-8)}$$

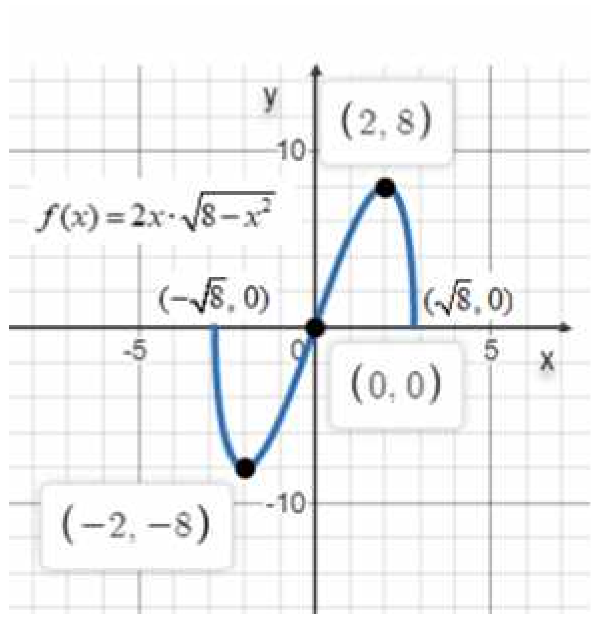
נמצא את סוגי נקודות הקיצון, בהתאם לטבלת עלייה וירידה, על פי ערכי הפונקציה בלבד.
את סימני הנגזרת נוסיף עבור סעיף ז.

x	$-\sqrt{8}$		-2		2		$\sqrt{8}$
$f(x)$	0		-8		8		0
$f'(x)$		-		+		-	
מסקנה	Max	↘	Min	↗	Max	↘	Min

תשובה (ג): $(\sqrt{8},0)$ **מינימום ,** $(2,8)$ **מקסימום,** $(-2,-8)$ **מינימום,** $(-\sqrt{8},0)$ **מקסימום.**

תשובה (ד): עלייה: $-2<x<2$ **, ירידה:** $2<x<\sqrt{8}$ **או** $-\sqrt{8}<x<2$ **.**

ה. הסקיצה המתאימה.



ו. $f(x)+c$ **היא הזזה אנכית, של** $f(x)$ **, כלפי מטה עבור** $c<0$ **, וכלפי מעלה עבור** $c>0$ **.**

על מנת לקבל השקה לציר ה- x **, יש להוריד, או להעלות את הגרף –**
כך שנקודות הקיצון הפנימיות תהיינה על ציר ה- x**.**

תשובה : $c=8$ **,** **או** $c=-8$ **.**

ז. שיקולים לבחירת גרף הנגזרת, $f'(x)$ הגרף של $f'(x)=\frac{-4x^2+16}{2\sqrt{8-x^2}}$.

(1) תחום ההגדרה שלה הוא $-\sqrt{8}<x<\sqrt{8}$ (כי $x=\pm\sqrt{8}$ מאפס את המכנה של הנגזרת).

(2) $f'(x)$ אינה מוגדרת עבור $x=\pm\sqrt{8}$, והישרים $x=\sqrt{8}$ ו- $x=-\sqrt{8}$ מהווים אסימפטוטה אנכית.

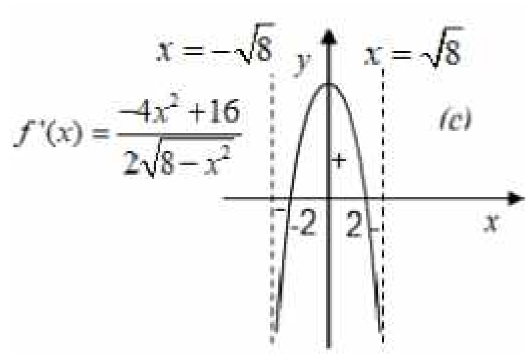
(3) חזקת המונה (2) גדולה מחזקת המכנה (1), ולכן אין אסימפטוטה אופקית.

(4) נקודות האפס של $f'(x)$ הן : $(2,0)$ ו- $(-2,0)$.

(5) תחומי החיוביות של $f'(x)$, תואמים לתחומי העלייה של $f(x)$: $-2<x<2$.

(6) תחומי השליליות של $f'(x)$, תואמים לתחומי הירידה של $f(x)$: $2<x<\sqrt{8}$ או $-\sqrt{8}<x<2$.

(7) $f'(x)=\frac{-4x^2+16}{2\sqrt{8-x^2}}$ היא פונקציה זוגית, ולכן סימטרית לציר ה- y .



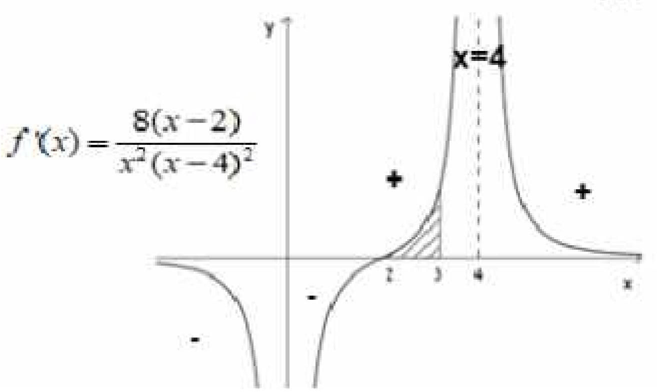
תשובה: גרף (c).

א. בשרטוט מתואר גרף הנגזרת $f'(x)=\frac{8(x-b)}{x^2(x-c)^2}$ **של הפונקציה** $f(x)$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה: $x\neq 0,4$ **.**

ב. על פי השרטוט, יש אסימפטוטה אנכית : $x=4$ **, ולכן** $x=4$ **מאפס את המכנה.**

$4-c=0 \quad \rightarrow \boxed{c=4}$



על פי השרטוט $f'(2)=0$ **.**

$0=\frac{8(2-b)}{2^2(2-c)^2} \quad \rightarrow \boxed{b=2}$

תשובה: $c=4$ **,** $b=2$ **.**

ג. נציב $c=4$ **,** $b=2$ **בתבנית הנגזרת ונקבל:** $\boxed{f'(x)=\frac{8(x-2)}{x^2(x-4)^2}}$ **.**

הנגזרת חיובית, כאשר היא מעל ציר ה- x **ושלילית כאשר היא מתחת לציר זה.**

תשובה: חיובית: $x>4$ **או** $2<x<4$**, שלילית:** $0<x<2$ **או** $x<0$ **.**

(הערה: בניגוד לתחומי עליה וירידה, הרי שתחומי חיוביות ושליליות ניתן לרשום גם כך -

חיובית: $x>2, x\neq 4$ **, שלילית:** $x<2, x\neq 0$ **)**

ד. ה. נרשום תחומי עלייה וירידה של $f(x)$ **ובהתאם נקודות הקיצון וסוגן, על פי סימני הנגזרת.**

כאשר הנגזרת חיובית, הפונקציה עולה, וכאשר הנגזרת שלילית הפונקציה יורדת.

תשובה (ה) עלייה של $f(x)$ **:** $x>4$ **או** $2<x<4$**, ירידה של** $f(x)$ **:** $0<x<2$ **או** $x<0$**.**

תשובה (ד) $x=2$ **מינימום (הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות).**

ו. נתון: $f(x)=\frac{a}{x(a-x)}$ **(** $a\neq 1$ **פרמטר) , וגודל השטח המקווקו הוא** $\frac{1}{3}$ **.**

$$\int_2^3 (f'(x)-0)\,dx=\frac{1}{3}$$

$$f(x)\Big]_2^3=\frac{1}{3}$$

$$\frac{a}{3(a-3)}-\frac{a}{2(a-2)}=\frac{1}{3} \quad /\cdot 6(a-2)(a-3)$$

$$2a(a-2)-3a(a-3)=2(a-2)(a-3)$$

$$2a^2-4a-3a^2+9a=2(a^2-3a-2a+6)$$

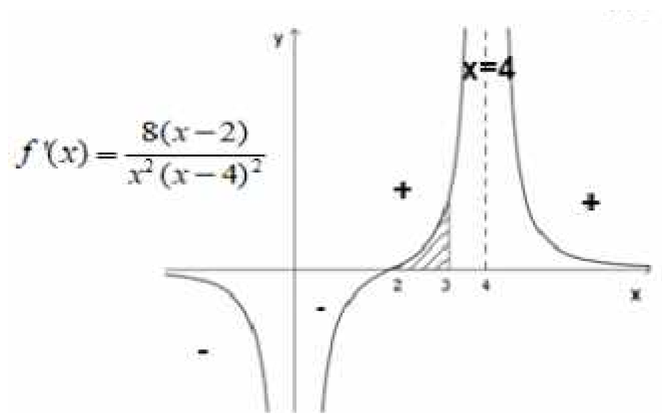
$$-a^2+5a=2a^2-6a-4a+12$$

$$0=3a^2-15a+12=0$$

$$\boxed{a=4} \quad o.k$$

$$\cancel{a=1} \quad \leftarrow a\neq 1$$

תשובה $a=4$ **.**



א. נתון הגרף של הפונקציה $g(x)=\frac{(x+4)^2}{32}$ **, שהוא גרף של פרבולה בעלת מינימום, בקדקוד** $(-4, 0)$**.**

נתון הגרף של הפונקציה $f(x)=\sqrt{x+4}$ **, שתחום ההגדרה שלה הוא** $x\ge -4$ **.**

כבר לפי שתי עובדות אלו, ניתן לומר שגרף (i) **מתאים ל-** $g(x)=\frac{(x+4)^2}{32}$ **, וגרף** (ii) **ל-** $f(x)=\sqrt{x+4}$ **.**

ניתן גם לראות ש: $f(0)=\sqrt{0+4}=2>g(0)=\frac{(0+4)^2}{32}=\frac{1}{2}$ **, ובסרטוט גרף** (ii) **מעל גרף** (i)**, כאשר** $x=0$ **.**

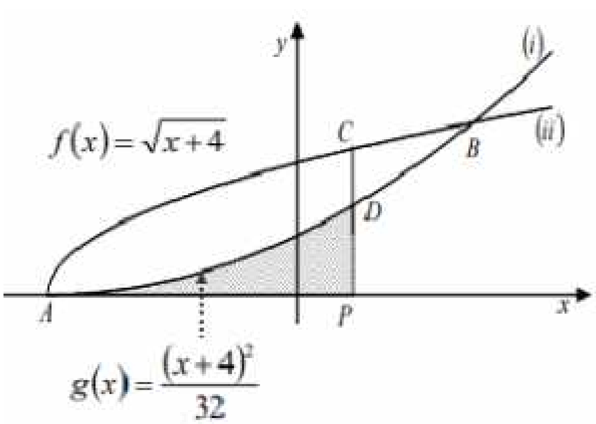
תשובה: גרף (i) **מתאים ל-** $g(x)=\frac{(x+4)^2}{32}$ **, וגרף** (ii) **ל-** $f(x)=\sqrt{x+4}$ **.**

ב. הפונקציה שיש להביא למקסימום היא אורך הקטע DC**.**

נשים לב, שאורך הקטע DC **הוא** 0 **, עבור** x_A **או** x_B **, ולכן יש מקסימום פנימי, בתחום** $x_A<x<x_B$ **.**

נסמן $x_C=t$ **, ומכיוון שהקטע** DC **מאונך לציר ה-** x **, הרי ש-** $x_D=x_C=t$**.**

בהתאם: $C(t,\sqrt{t+4})$ **ו- .**



$$DC=y_C-y_D=$$

$$\boxed{DC=\sqrt{t+4}-\frac{(t+4)^2}{32}}$$

$$DC=\sqrt{t+4}-\frac{(t+4)^2}{32}$$

$$(DC)'=\frac{1}{2\sqrt{t+4}}-\frac{2(t+4)\cdot 1}{32}$$

$$\boxed{(DC)'=\frac{16-2(t+4)\sqrt{t+4}}{32\sqrt{t+4}}}$$

$$0=16-2(t+4)\sqrt{t+4}$$

$$2(t+4)\sqrt{t+4}=16 \quad /:2$$

$$(t+4)\sqrt{t+4}=8 \qquad \boxed{m=\sqrt{t+4}}$$

$$m^2\cdot m=8$$

$$m^3=8$$

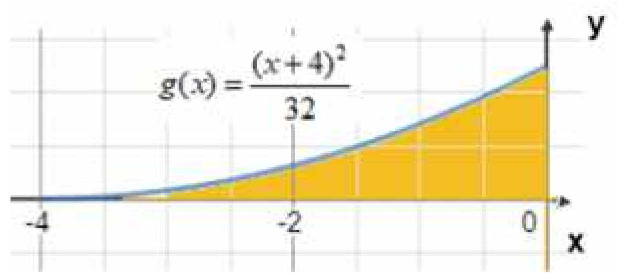
$$m=2 \quad \to 2=\sqrt{t+4} \quad \to 4=t+4 \quad \to \boxed{t=0}$$

נקבע שזה קיצון ואת סוגו, בהתאם לאורכי הקטע DC **.**

$$DC(x_A)=DC(-4)=0 \quad , \quad \underset{max}{DC(0)}=\sqrt{0+4}-\frac{(0+4)^2}{32}=1.5 \quad , \quad DC(x_B)=0$$

תשובה: אורכו המקסימלי של הקטע DC **הוא** 1.5**.**

ג. נתון אורך הקטע DC **מקסימלי, ולכן** $x_P = x_D = x_C = 0$.



$$\int_{-4}^{0} \left(\frac{(x+4)^2}{32} - 0\right) dx = \frac{(x+4)^3}{3\cdot 32}\Big]_{-4}^{0}$$

$$\left.\begin{aligned} x=0: &\quad \frac{(0+4)^3}{96} = \frac{2}{3} \\ x=-4: &\quad \frac{(-4+4)^3}{96} = 0 \end{aligned}\right\} \boxed{S = \frac{2}{3}}$$

תשובה: השטח הכלוא הוא $\frac{2}{3}$ **יח"ר.**

א. נביע את שטח ΔABC **בעזרת** x **.**

$\sphericalangle ABC = 90^\circ$ **, כי היא נשענת על הקוטר.**

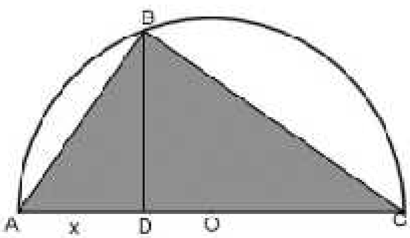
$\sphericalangle ABD = 90^\circ - \sphericalangle A$, $\sphericalangle CBD = \sphericalangle A$, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BCD$

נראה שלוש דרכים למציאת הגובה BD **.**

(1) ריבוע הגובה ליתר במשולש ישר זווית שווה למכפלת הקטעים שהוא מקצה על היתר.

לכן $BD^2 = x(12-x)$ **, ו-** $BD = \sqrt{12x - x^2}$ **.**

(2) $\Delta ABD \sim \Delta BCD$ **(משפט דמיון זווית זווית).**



$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}$ **, ומכאן נקבל** $BD^2 = AD \cdot CD = x(12-x)$ **.**

לכן $BD^2 = x(12-x)$ **, ו-** $BD = \sqrt{12x - x^2}$ **.**

(3) $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BCD \leftarrow$ $BD^2 = AD \cdot CD \rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABD: \quad \tan\sphericalangle ABD = \frac{AD}{BD} \\ \Delta BDC: \quad \tan\sphericalangle BCD = \frac{BD}{DC} \end{array}\right\} \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DC}$$

$BD^2 = x(12-x)$ **, ו-** $BD = \sqrt{12x - x^2}$ **.**

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{12 \cdot \sqrt{12x - x^2}}{2}$$

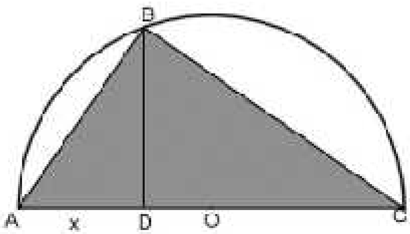
$$\boxed{S_{\Delta ABC} = 6\sqrt{12x - x^2}}$$

תשובה: $S_{\Delta ABC} = 6\sqrt{12x - x^2}$ **.**

ב. יש למצוא מקסימום לשטח ΔABC. תחום ההגדרה הוא $0 < x < 12$.
נראה שתי דרכים למציאת השטח המקסימלי.

(1) כיוון שאורך הצלע AC קבוע (12 ס"מ), הרי ששטח מקסימלי יתקבל כאשר הגובה אליה מקסימלי.
הגובה המקסימלי יהיה רדיוס המעגל, המאונך ל- AC, שאורכו הוא 6 ס"מ, ולכן $x = OA = 6$.

(2) חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה שיש להביא למקסימום היא שטח ΔABC.



$$\boxed{S = 6\sqrt{12x - x^2}}$$

$$S' = 6 \cdot \frac{12 - 2x}{2\sqrt{12x - x^2}}$$

$$\boxed{S' = \frac{3(12 - 2x)}{\sqrt{12x - x^2}}}$$

$$0 = 12 - 2x$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

$$\left.\begin{array}{l} S'(5) = \frac{+}{+} > 0 \\ S'(7) = \frac{-}{+} < 0 \end{array}\right\} x = 6, \max$$

תשובה: $x = 6$, עבורו שטח ΔABC מקסימלי.

ג. גודל השטח הלבן שבציור, שווה להפרש בין שטח חצי המעגל ושטחו המקסימלי של המשולש.

שטח חצי המעגל הוא: $S = \frac{® R^2}{2} = \frac{® \cdot 6^2}{2} = 18®$.

שטחו המקסימלי של המשולש הוא $S = \frac{AC \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36$.

תשובה: גודל השטח הלבן הוא $18® - 36 \sim 20.55$ סמ"ר.