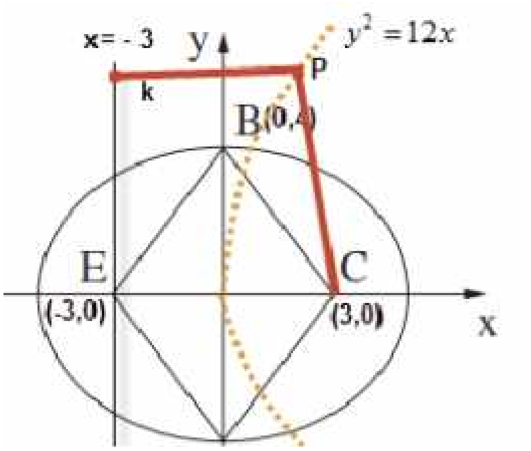
א. (1) שטח מעוין שווה למכפלת צלע בגובה, או למחצית מכפלת האלכסונים.
לכן, שטחו 24 יח"ר $= 5\cdot 4.8$, בהתאם לנתונים על אורך צלע המעוין ואורך גובהו.
כיוון שהאלכסונים במעוין חוצים זה את זה, ובמקרה זה נחצים בראשית
(כי אם לא יחצו בראשית, נקבל דלתון ולא מעוין),
הרי ששטח המעוין הוא גם $\frac{2x_C\cdot 2y_B}{2}$, ונקבל $\frac{2x_C\cdot 2y_B}{2}=24$ ומכאן ש: $y_B=\frac{12}{x_C}$.

על-פי משפט פיתגורס ב- ΔBOC (O ראשית הצירים): $(x_C)^2+(\frac{12}{x_C})^2=5^2$.



$$(x_C)^4-25(x_C)^2+144=0$$
$$x_C=3 \quad \to y_B=4 \quad o.k.\ (BD>AC)$$
$$x_C=4 \quad \to y_B=3 \quad not\ o.k.\ (BD<AC)$$

שאר הקדקודים בהתאם לסימטריה לראשית הצירים.

תשובה: $B(0,4),\quad C(3,0),\quad D(0,-4),\quad E(-3,0)$.

(2) מוקדי האליפסה הם $C(3,0),\quad E(-3,0)$ **, ובהתאם** $c=3$ **.**

האליפסה עוברת בקדקודים $B(0,4),\quad D(0,-4)$ **, ובהתאם** $b=4$ **.**

$a^2-b^2=c^2$ **, ולכן** $a=\sqrt{4^2+3^2}=5$ **.**

או, סכום מרחקי נקודה שעל האליפסה מהמוקדים קבוע ושווה ל- $2a$ **.**

לכן: $BC+BE=2\cdot 5=10 \quad \to a=5$

תשובה: משוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ **.**

ב. הנקודה $M(\sqrt{15},y_M)$ **נמצאת, ברביע הראשון, על האליפסה וגם על הפרבולה** $y^2=2px$ **.**

נציב את שיעוריה במשוואת האליפסה:

$\frac{\sqrt{15}^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ **ונקבל** $y_M=1.25$ **.**

נציב $M(1.25,\sqrt{15})$ **במשוואת הפרבולה:** $\sqrt{15}^2=2p\cdot 1.25$ **ולכן** $p=6$.

משוואת הפרבולה היא $y^2=12x$ **, והמוקד שלה הוא ב-** $(\frac{p}{2},0)=(\frac{6}{2},0)=(3,0)$ **, כלומר בנקודה** $C(3,0)$ **.**

תשובה: הוכַח.

ג. כל נקודה על פרבולה, נמצאת במרחקים שווים מהמוקד ומהמדריך שלה.

בפרבולה $y^2=12x$ **, המוקד הוא** $C(3,0)$ **, והמדריך הוא הישר** $x=-3$ **, המקביל לציר ה-** y **ועובר ב** $E(-3,0)$ **.**

לכן PC **הוא המרחק מהמוקד, ו-** k **הוא המרחק מהמדריך – והם שווים זה לזה.**

תשובה: $\frac{PC}{k}=1$ **.**

א. $SABCD$ **היא פירמידה ישרה, מכאן שהמקצועות הצדדיים שווים זה לזה,**
והגובה יורד למרכז המעגל החוסם – במקרה זה למפגש אלכסוני ריבוע הבסיס.

(1) נראה כי $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$**.**

$$\boxed{\overrightarrow{SM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SM}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AS}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AS}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AS}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AS}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SC})$$

$$\boxed{\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$$

תשובה: הוּכַח.

(2) נראה כי $\overrightarrow{SM}\perp\overrightarrow{AC}$**.**
כיוון שמקצועות צדדיים שווים זה לזה, הרי ש- ΔSAC **הוא שווה שוקיים.**
בסעיף א(1) הראינו כי M **הוא אמצע** AC**, כלומר ש-** SM **תיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים,**
ולכן הוא גם גובה לבסיס המשולש.
דרך חלופית, הגובה של פירמידה ישרה יורד למרכז מעגל חוסם, ובמקרה זה למפגש אלכסוני הריבוע,
הרי שכיוון שהאלכסונים חוצים זה את זה, אז M **הוא מרכז המעגל החוסם, ו-** SM **הוא גובה הפירמידה,**
ובפרט מאונך גם ל- AC**.**
תשובה: הוּכַח.

(3) נראה כי SM **הוא גובה הפירמידה.**
למעשה הוסבר כבר בתת-סעיף א(2).
M **הוא מרכז המעגל החוסם את בסיס הפירמידה, ולכן** SM **הוא גובה הפירמידה.**
תשובה: הוּכַח.

ב. נתון: $A(\sqrt{3},1,0)$ **,** $C(-\sqrt{3},-1,0)$.

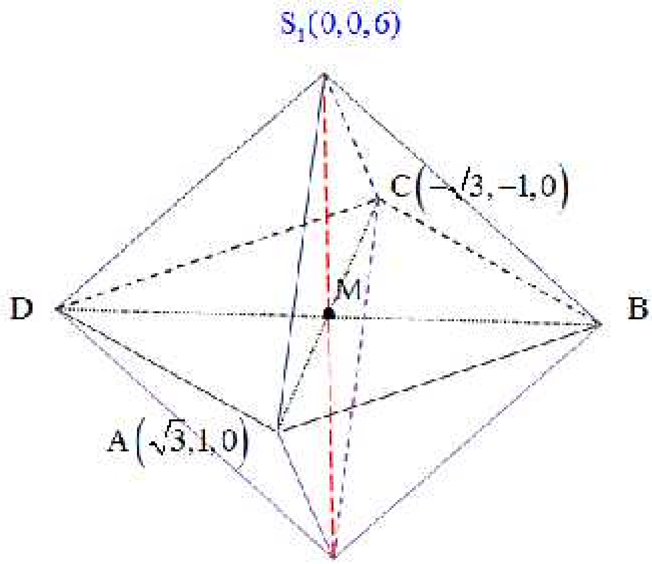
D **ו-** B **נמצאות במישור** $z=0$ **, כלומר כל בסיס הפירמידה במישור זה (כי גם** $z_A=z_C=0$**).**

ולכן הנורמל למישור יהיה מקביל לישר $z=0$ **, או** $z=0$ **בעצמו.**

(1) נשתמש בנוסחת אמצע קטע (M **הוא אמצע** AC**).**

$$M\left(\frac{\sqrt{3}+(-\sqrt{3})}{2},\frac{1+(-1)}{2},\frac{0+0}{2}\right)=M(0,0,0)$$

תשובה: $M(0,0,0)$ **(ראשית הצירים) .**



(2) נפח הפירמידה $SABCD$ **הוא** 16**.**

$$\overrightarrow{AC}=\underline{C}-\underline{A}=\underline{x}=(-2\sqrt{3},-2,0)$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2)^2+0^2}=4$$

$$S_{ABCD}=\frac{4\cdot 4}{2}=8$$

$$16=\frac{8\cdot\left|\overrightarrow{SM}\right|}{3}$$

$$\left|\overrightarrow{SM}\right|=6$$

תשובה: $S_1(0,0,6)$, $S_2(0,0,-6)$.

ג. (1) S_1MS_2 **מונח על ציר ה-** z **, לכן** $c=0$ **, ו-** $d=0$, **במשוואת המישור** AS_1S_2 **.**

$$\overrightarrow{MA}=\underline{A}-\underline{M}=\underline{x}=(\sqrt{3},1,0)$$

$$(a,b,0)\cdot(\sqrt{3},1,0)=0$$

$$a\sqrt{3}+b=0$$

$$a=1 \quad \to b=-\sqrt{3}$$

תשובה: משוואת המישור AS_1S_2 **היא** $x-\sqrt{3}y=0$.

(2) נקודה C **נמצאת במישור המשולש** AMS **, המוכל במישור** AS_1S_2 **ולכן גם היא נמצאת במישור.**

ניתן גם להציב את שיעוריה במשוואת המישור: $-\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot 1=0 \quad \to 0=0 \quad o.k.$

תשובה: נקודה C **נמצאת על המישור** AS_1S_2 .

א. נפתור את המשוואה $z^3=-1$ **.**

$$z^3=1cis(180°)$$
$$z_K=\sqrt[3]{1}\,cis\left(\frac{180°}{3}+\frac{360°k}{3}\right)$$
$$z_K=cis(60°+120°k)$$
$$z_1=cis\,60°=0.5+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2=cis180°=-1$$
$$z_3=cis\,300°=0.5-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

תשובה: $z_1=cis\,60°=0.5+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=cis180°=-1$ **,** $z_3=cis\,300°=0.5-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **.**

ב. (1) נראה ש- z_1 **,** z_2 **, ו-** z_3 **הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית.**

$$\frac{z_3}{z_2}=\frac{cis\,300°}{cis180°}=cis(300°-180°)=cis(120°)$$
$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{cis180°}{cis\,60°}=cis(180°-60°)=cis(120°)$$

מכאן ש- $\frac{z_3}{z_2}=\frac{z_2}{z_1}$, **ואלו שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית, שמנתה** $q=cis(120°)$ **.**

תשובה: הוּכַח.

(2) נמצא את z_5 **, בסדרה ההנדסית, שבה** $z_1=cis\,60°$ **ו-** $q=cis(120°)$ **.**

$$z_5=z_1q^4=cis\,60°\cdot(cis120)^4=cis\,60°\cdot(cis120°\cdot4)=cis\,60°\cdot(cis\,480°)$$
$$z_5=cis(60°+480°)=cis\,540°$$
$$\boxed{z_5=cis180°=-1}$$

תשובה: $z_5=cis180°=-1$ **.**

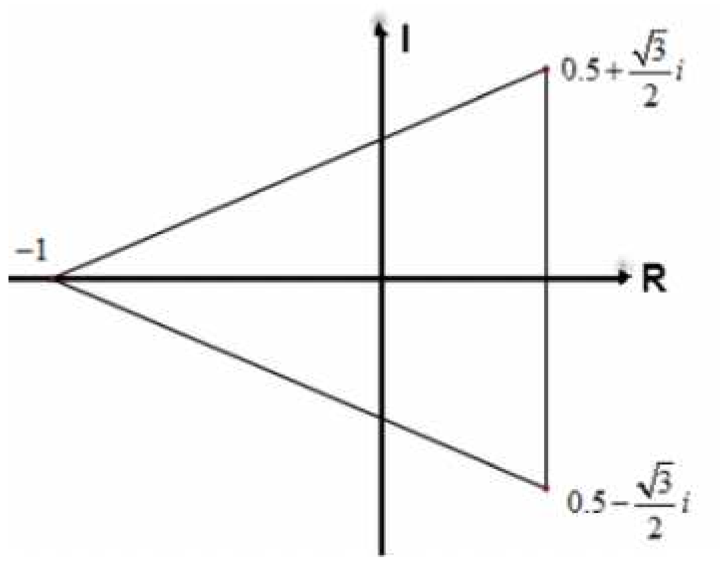
ג. (1) z_{13} **,** z_{14} **, ו-** z_{15} **הם קדקודי** ΔABC **שיש לחשב את שטח.**

נשים לב שקיימת מחזוריות בסדרה ההנדסית, כאשר לאחר שלושת האיברים הראשונים –

נקבל פעם נוספת את האיברים $cis\,60°$ **,** $cis\,180°$ **ו-** $cis\,300°$**.**

כי: $z_4 = z_3\,q = cis\,300° \cdot cis\,120° = cis\,420° = cis\,60°$ **וכן הלאה.**

נצייר את המשולש במישור גאוס, ללא רישום שמות הקדקודים.



$$S = \frac{\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - (-\frac{\sqrt{3}}{2})\right]\left[(0.5-(-1)\right]}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}\cdot 1.5}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

תשובה: שטח ΔABC **הוא** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$**.**

(2) כפי שהוסבר בתת-סעיף ג' (1) , כל שלושה איברים עוקבים בסדרה z_n **הם:** $cis\,60°$ **,** $cis\,180°$ **ו-** $cis\,300°$**.**

לכן לא רק ש- ΔKLM **חופף ל-** ΔABC **, הוא גם מתלכד איתו.**

תשובה: הוכַח.

4

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{x^2}-2x}{e^{x^2}}$ **.**

(1) המכנה חיובי לכל x **.**

תשובה: תחום ההגדרה כל x **.**

(2) נמצא את נקודות הקיצון ונקבע את סוגן.

$$f'(x)=\frac{e^{x^2}(2x\cdot e^{x^2}-2)-(e^{x^2}-2x)\cdot 2x\cdot e^{x^2}}{(e^{x^2})^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^{x^2}\left[2x\cdot e^{x^2}-2-2x(e^{x^2}-2x)\right]}{(e^{x^2})^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot e^{x^2}-2-2xe^{x^2}+4x^2}{e^{x^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{4x^2-2}{e^{x^2}}}$$

$$0=4x^2-2$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

או:

$$f(x)=\frac{e^{x^2}-2x}{e^{x^2}}=1-\frac{2x}{e^{x^2}}$$

$$f'(x)=-\frac{2e^{x^2}-2x\cdot 2x\cdot e^{x^2}}{(e^{x^2})^2}$$

$$f'(x)=-\frac{2e^{x^2}(1-2x^2)}{(e^{x^2})^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2(2x^2-1)}{e^{x^2}}}$$

מונה הנגזרת ($4x^2-2$ **) הוא של פרבולה בעלת מינימום (המכנה חיובי).**

לכן הנגזרת חיובית עבור $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ **או** $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ **והפונקציה עולה בתחומים אלו,**

והנגזרת שלילית עבור $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ **, והפונקציה יורדת בתחום זה.**

בהתאם נקבע את סוג נקודות הקיצון.

תשובה: $(\frac{1}{\sqrt{2}},0.142)$ **מינימום ,** $(-\frac{1}{\sqrt{2}},1.858)$ **מקסימום.**

(3) תשובה: עלייה: $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ **או** $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ **, ירידה** $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ **.**

(4) ניעזר בתבנית הפונקציה $f(x)=1-\frac{2x}{e^{x^2}}$, למציאת אסימפטוטה אופקית.

נציב $x=4$ ונקבל 1.0000009, כלומר שאיפה ל- $y=1$, מלמעלה.

נציב $x=-4$ ונקבל 0.999999 , כלומר שאיפה ל- $y=1$, מלמטה.

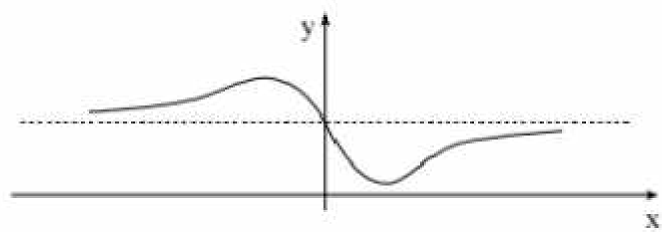
או הסבר מעמיק יותר (ולא נדרש בבגרות):

הביטוי e^{x^2} שבמכנה המחובר הימני שואף לאינסוף, כאשר $x\to\pm\infty$, מהר יותר מהביטוי $2x$ שבמונה,
לכן המחובר הימני שואף לאפס, כאשר $x\to\pm\infty$ - והפונקציה כולה $f(x)\to 1$.

אין אסימפטוטה אנכית, כי הפונקציה מוגדרת לכל x .

תשובה: $y=1$ אסימפטוטה אופקית.

(5) הסקיצה המתאימה של $f(x)=\frac{e^{x^2}-2x}{e^{x^2}}$.



ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

(1) המכנה חיובי לכל x , על פי הסקיצה של $f(x)$, בתת-סעיף א(5) .

ולכן $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ מוגדרת לכל x .

תשובה: הוכַח.

(2) נמצא את נקודות הקיצון ונקבע את סוגן.

$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$ **, כלומר הנגזרת מתאפסת כאשר** $f'(x)=0$ **, אולם סימנה משתנה,**

ובהתאם מתחלפים תחומי העלייה והירידה, סוג נקודות הקיצון,

ושיעור ה- y **של נקודות הקיצון מתהפך –**

$g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{f(\frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{0.142} = 7.131$ **,** $g(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{f(-\frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{1.858} = 0.538$ **.**

תשובה: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 7.131)$ **מקסימום ,** $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0.538)$ **מינימום.**

(3) תשובה: ירידה: $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ **או** $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ **, עלייה** $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ **.**

(4) הראינו בתת-סעיף א(4) ש- כאשר $x \to \pm\infty$ **, אז** $f(x) \to 1$

בהתאם, כאשר $x \to \pm\infty$ **, אז** $g(x) \to \frac{1}{1} = 1$ **.**

גם כאן ניתן להציב:

נציב $x=4$ **ונקבל** 0.999999**, כלומר שאיפה ל-** $y=1$ **, מלמטה.**

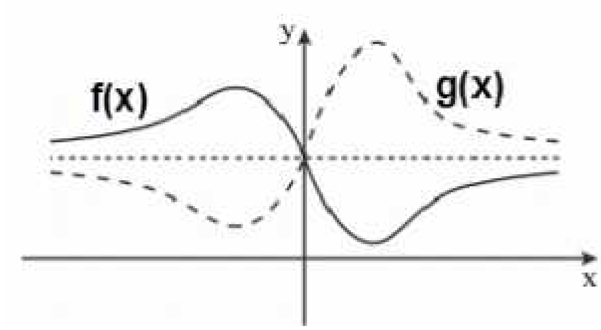
נציב $x=-4$ **ונקבל** 1.0000009**, כלומר שאיפה ל-** $y=1$ **, מלמעלה.**

תשובה: $y=1$ **אסימפטוטה אופקית.**

(5) הסקיצה המתאימה של $f(x) = \frac{e^{x^2} - 2x}{e^{x^2}}$ **ושל** $g(x)$ **.**

נשים גם לב ששני הגרפים נחתכים כאשר $y=1$ **, וזה קורה על ציר ה-** y **.**

(כאשר מציירים גרפים, טוב למצוא נקודת חיתוך עם ציר ה- y **, אם קיימת.)**



5

א. נתונה הפונקציה $h(x)=\frac{x+3}{x}$.

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x\neq 0$.

ב. נמצא את התחום שבו $h(x)>0$.

$$\frac{x+3}{x}>0 \quad /\cdot x^2>0$$
$$x(x+3)>0$$

קבלנו באגף שמאל ביטוי ריבועי, שמתואר על ידי פרבולה בעלת מינימום,

שחיובית עבור $x>0$ **או** $x<-3$.

תשובה: $x>0$ **או** $x<-3$.

ג. נמצא את הפונקציה $f(x)$.

בתחום שבו $h(x)>0$ **(כלומר בתחום** $x>0$ **או** $x<-3$ **) נתון כי** $f'(x)=\frac{h'(x)}{h(x)}$.

נמצא את הפונקציה הקדומה, את $f(x)$ **, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית.**

$$f(x)=\int\frac{h'(x)}{h(x)}\,dx$$
$$f(x)=\int\frac{1}{h(x)}\cdot h'(x)\,dx$$
$$f(x)=\ell n\left|h(x)\right|+c$$
$$f(x)=\ell n\,h(x)+c \quad \leftarrow h(x)>0$$
$$f(x)=\ell n\frac{x+3}{x}+c$$

נציב את הנקודה $(3,\ell n2)$ **, הנמצאת על גרף הפונקציה** $f(x)$.

$$\ell n2=\ell n(\frac{3+3}{3})+c$$
$$\ell n2=\ell n2+c$$
$$c=0$$
$$\boxed{f(x)=\ell n(\frac{x+3}{x})}$$

תשובה: $f(x)=\ell n(\frac{x+3}{x})$.

ד. למציאת האסימפטוטות של $f(x)=\ell n(\frac{x+3}{x})$ המקבילות לצירים, נציב ערכים מתאימים.

נציב $x=0.000001$ **ונקבל** 17.21**, כלומר שאיפה ל-** $+\infty$**, ו-** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

נציב $x=-3.000001$ **ונקבל** -17.21 **, כלומר שאיפה ל-** $-\infty$**, ו-** $x=-3$ **אסימפטוטה אנכית.**

נציב $x=1000000$ **ונקבל** $2.99\cdot10^{-6}$ **, כלומר שאיפה ל-** $y=0$ **, מלמעלה, ו-**$y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

נציב $x=-1000000$ **ונקבל** $-3\cdot10^{-6}$ **, כלומר שאיפה ל-** $y=0$ **, מלמטה, ו-**$y=0$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

ניתן גם להבין שהביטוי $\frac{x+3}{x}$ **שואף ל-** 1**, כאשר** $x\to\pm\infty$ **ולכן הפונקציה שואפת ל-** $\ell n1=0$ **.**

תשובה: $x=0$ **,** $x=-3$ **,** $y=0$ **.**

ה. נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f(x)=\ell n(\frac{x+3}{x})$$

$$f'(x)=\frac{\frac{x-(x+3)}{x^2}}{\frac{x+3}{x}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-3}{x^2\cdot\frac{x+3}{x}}}$$

המכנה חיובי בתחום ההגדרה, והמונה שלילי.

בהתאם, הנגזרת שלילית עבור $x>0$ **או** $x<-3$ **. והפונקציה יורדת בתחום זה.**

תשובה: ירידה: $x>0$ **או** $x<-3$**, עלייה – אף** x **.**

ו. הסקיצה המתאימה של $f(x)$ **.**