א. הנקודה A **נמצאת על הפרבולה** $y^2=4x$ **,** $(P=2)$ **, ברביע הראשון.**

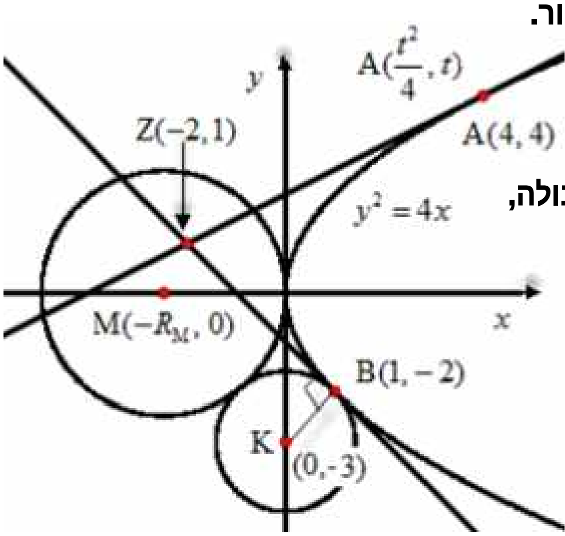
נסמן שיעוריה $A(\frac{t^2}{4},t)$ **. שני המשיקים בנקודות** A, B **נפגשים בנקודה** $Z(-2,1)$ **.**

משוואת משיק לפרבולה היא $yy_0=P(x+x_0)$ **ולכן שיפוע המשיק הוא** $m=\frac{P}{y_0}=\frac{2}{t}$ **ושווה גם ל-** m_{AZ} **.**

$\frac{2}{t}=\frac{t-1}{\frac{t^2}{4}+2}$ **ומכאן נקבל** $\frac{2}{t}=\frac{4(t-1)}{t^2+8}$ **ובהמשך** $t^2-2t-8=0$ **ופתרונות המשוואה** $t=4, t=-2$ **.**

מכאן ש- $A(4,4)$ **ברביע הראשון ו-** $B(1,-2)$ **ברביע הרביעי, כמתואר בציור.**

תשובה: $A(4,4)$ **,** $B(1,-2)$ **.**



ב. (1) מעגל שמרכזו על ציר ה- y **, ושיעוריו בהתאם** $K(0,y_K)$ **משיק לפרבולה,**

ולכן המשיק המשותף, ZB **, מאונך לרדיוס** KB **.**

$m_{ZB}=\frac{P}{y_B}=\frac{2}{-2}=-1$ **ולכן** $m_{KB}=1$ **(שיפוע הופכי לנגדי).**

$1=\frac{-2-y_K}{1-0}$ **ונקבל ש-** $y_K=-3$ **ו-** $K(0,-3)$ **.**

תשובה: $K(0,-3)$ **.**

(2) מעגל שמרכזו M **משיק לציר ה-** y **בראשית הצירים, ושיעוריו בהתאם** $M(-R_M,0)$ **,**

משיק גם מבחוץ למעגל שמרכזו $K(0,-3)$ **, ולכן אורך קטע המרכזים שווה לסכום הרדיוסים.**

$R_K=KB=\sqrt{(1-0)^2+(-2+3)^2}=\sqrt{2}$ **.**

$$\sqrt{2}+R_M=\sqrt{(-R_M-0)^2+(0+3)^2}$$
$$2+2\sqrt{2}R_M+R_M{}^2=R_M{}^2+9$$
$$R_M=\frac{7\sqrt{2}}{4}$$

ומשוואת המעגל היא $(x+\frac{7\sqrt{2}}{4})^2+y^2=6.125$ **.**

תשובה: $(x+\frac{7\sqrt{2}}{4})^2+y^2=6.125$ **.**

א. המישור $2x+y+2z-2m=0$ **מכיל את המשולש** ACO'.

הנקודה B **אינה נמצאת על מישור זה, שכן היא במישור** $Z=0$,
שישר החיתוך שלו עם המישור הנתון הוא AC **- כאשר** B **אינה על ישר החיתוך.**
כמו כן $BC' \| AO'$ **, שנמצא במישור הנתון, ולכן** BC' **מקביל למישור הנתון.**

<u>עוד הסבר</u>

בטריגו למרחב יש משפט: "אם ישר חותך מישור אז אין במישור ישר המקביל לו",
כיוון שברור ש- $BC' \| AO'$ **אז** BC' **לא יכול לחתוך את המישור על פי ההסבר**

<u>עוד הסבר</u>

כיוון שברור ש- $BC' \| AO'$ **אז המכפלה הסקלרית של** BC' **עם וקטור המקדמים של המישור היא** 0,
בדיוק כמו זו של AO'. **מכאן ש-** BC' **מקביל או מוכל במישור.**
בשאלה נשאלנו האם הוא מקביל או חותך את המישור – אז האפשרות הנכונה היחידה שהוא מקביל.
כמוכן ניתן להסביר שהנקודה B **בוודאות לא על המישור כמו שהסברנו בהסבר הראשון,**
או להציב את שיעוריה $(m,2m,0)$ **(כפי שנראה בהמשך) במשוואת המישור** $2x+y+2z-2m=0$,
ואז מקבלים $2m+2m+0-2m=0$, **ומכאן ש-** $m=0$ **וזו סתירה לנתון שהפרמטר** m **הוא חיובי**.

<u>הערה משלימה</u>

אין כל משמעות למשוואת המישור הנתונה, בהקשר של סעיף זה,
BC' **מקביל לכל מישור שעובר בקדקודים** A , C **ו-** O'.
תשובה: BC' **מקביל למישור הנתון.**

ב. (1) הראינו כי $BC' \| AO'$.

$O'M$ **במישור הנתון, וכיוון שאינו מתלכד עם** $O'A$ **וגם יש להם מוצא משותף , הרי ש-** $O'A \nparallel O'M$.

מכאן ש- $O'M \nparallel BC'$.

תשובה: הישרים BC' **ו-** $O'M$ **אינם מקבילים.**

(2) הישרים BC' **ו-** $O'M$ **מצטלבים,**

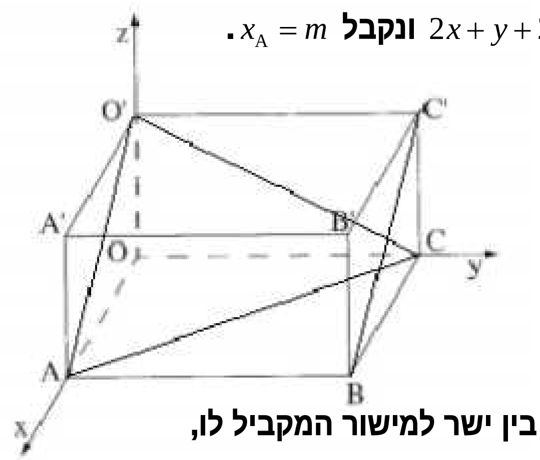
ולכן המרחק ביניהם הוא כמרחק BC' **מהמישור בו** $O'M$ **מוכל, וגם הישר** $O'A$ **המקביל ל -** BC'**.**

כלומר מרחק BC' **מהמישור הנתון** $®: 2x+y+2z-2m=0$**, או למשל כמרחקה של הנקודה** B **ממישור זה.**

B **במישור** $Z=0$**, כאשר** $x_B = x_A$ **ו-** $y_B = y_C$**.**

$x_C = z_C = 0$ **: נציב במשוואת המישור הנתון** $2x+y+2z-2m=0$ **ונקבל** $y_C = 2m$**.**

$y_A = z_A = 0$ **: נציב במשוואת המישור הנתון** $2x+y+2z-2m=0$ **ונקבל** $x_A = m$**.**



מכאן ששיעורי הנקודה B **הם** $(m,2m,0)$**.**

$$d_{B_®} = \frac{|2m+2m+0-2m|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{2m}{3}$$

תשובה: המרחק הוא $\frac{2m}{3}$ **.**

ג. כיוון ששני האנכים EC' **ו-** FB **מקבילים זה לזה והם אנכים בין ישר למישור המקביל לו,**

הרי שנוצר מלבן $EFBC'$**, שבו** $C'B = EF = 2\sqrt{2}$**.**

$x_{O'} = y_{O'} = 0$ **: נציב במשוואת המישור הנתון ונקבל** $z_{O'} = m$ **ולכן** $C'(0,2m,m)$**, כי** $z_{C'} = z_{O'} = m$**.**

$\overrightarrow{C'B} = \underline{B} - \underline{C'} = \underline{x} = (m,0,-m)$**.**

$2\sqrt{2} = \sqrt{m^2+(-m)^2}$**, ומכאן** $8 = 2m^2$ **ו-** $m=2$ **(**$m>0$**).**

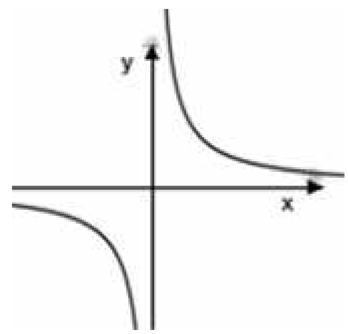
תשובה: $m=2$**.**

א. נסרטט במערכת צירים את המקום הגיאומטרי המקיים $|z^2-3i|=|z^2-i|$.

נסמן $z=a+bi$.

$$|z^2-3i|=|z^2-i|$$
$$|(a+bi)^2-3i|=|(a+bi)^2-i|$$
$$|a^2+2abi-b^2-3i|=|a^2+2abi-b^2-i|$$
$$|(a^2-b^2)+(2ab-3)i|=|(a^2-b^2)+(2ab-1)i|$$
$$(a^2-b^2)^2+(2ab-3)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab-1)^2$$
$$4a^2b^2-12ab+9=4a^2b^2-4ab+1$$
$$8=8ab$$
$$1=ab$$

וזו הפונקציה $y=\frac{1}{x}$ **, היורדת עבור** $x>0$ **או** $x<0$ **, כאשר הצירים מהווים אסימפטוטות לגרף הפונקציה.**



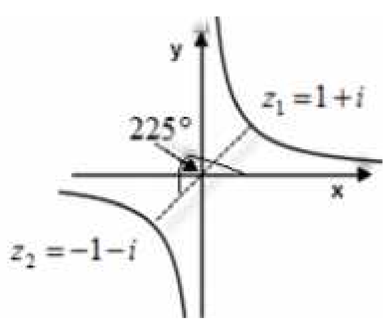
ב. $z_1=1+iy_1$ **נמצא על הפונקציה** $y=\frac{1}{x}$.

נציב $x=1$ **ונקבל** $y=1$ **, כלומר** $z_1=1+i$.

z_1 **באותו מרחק מהראשית כמו זה של** z_2 .

כיוון ש- $y=\frac{1}{x}$ **היא פונקציה אי-זוגית, הרי שהנקודה הסימטרית לראשית הצירים היא** $(-1,-1)$ **,**

כאשר $z_2=-1-i$ **, מספר נגדי ל-** $z_1=1+i$.



$$\tan\alpha_{z_2}=\frac{-1}{-1}$$
$$\alpha=45°+180°k$$
$$\alpha=225° \quad \leftarrow 3rd\ quadrant$$

תשובה: הארגומנט של z_2 **הוא** $225°$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\ell n\frac{a+x}{a-x}$ **(** $a>0$ **הוא פרמטר).**

(1) פונקציית ה- ℓn **מקבלת רק ביטויים חיוביים.**

$$\frac{a+x}{a-x}>0 \quad /\cdot(a-x)^2>0$$

$$(a-x)(a+x)>0$$

מתקבל גרף של פרבולה הפוכה, בעלת מקסימום ("בוכה"), החיובית עבור $-a<x<a$**.**

תשובה: הפונקציה מוגדרת עבור $-a<x<a$ **.**

(2) על פי חוקי הלוגריתמים: $f(x)=\ell n(a+x)-\ell n(a-x)$ **.**

תזכורת - לפונקציה $\ell n\, x$ **יש אסימפטוטה אנכית** $x=0$**.**

בהתאם, עבור הפונקציה הנתונה, שתי האסימפטוטות האנכיות הן $x=a$ **ו-** $x=-a$**.**

תשובה: שתי האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x **הן** $x=a$ **ו-** $x=-a$**.**

(3) נמצא תחומי עלייה וירידה.

$$f'(x)=\frac{1}{a+x}-\frac{1\cdot(-1)}{a-x}$$

$$f'(x)=\frac{a-x+a+x}{(a+x)(a-x)}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2a}{(a+x)(a-x)}}$$

נתון כי $a>0$ **, ובנוסף המכנה חיובי בתחום ההגדרה, ולכן הנגזרת חיובית בתחום ההגדרה.**

תשובה: עלייה: $-a<x<a$ **, ירידה: אף** x **.**

(4) נמצא את שיעורי נקודות הפיתול.

$$f'(x)=\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(a+x)^2}+\frac{-1\cdot(-1)}{(a-x)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-(a-x)^2+(a+x)^2}{(a+x)^2\cdot(a-x)^2}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{4ax}{(a+x)^2\cdot(a-x)^2}}$$

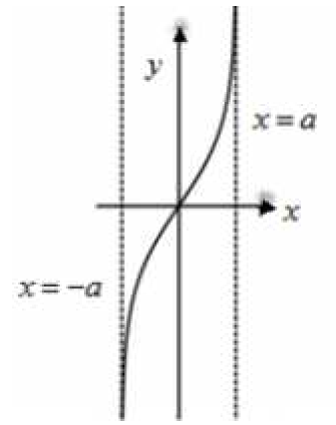
נתון כי $a>0$ **ולכן מונה הנגזרת השנייה הוא של קו ישר עולה, המתאפס עבור** $x=0$ **(המכנה חיובי).**

לכן הפונקציה קעורה כלפי מטה עבור $x<0$ **, וכלפי מעלה עבור** $x>0$ **, ו-** $x=0$ **פיתול.**

$$f(0)=\ell n\frac{a+0}{a-0}=\ell n1=0 \text{ .}$$

תשובה: שיעורי נקודת הפיתול הם $(0,0)$**.**

ב. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



ג. הישר $y = x$ **, ששיפועו** 1**, משיק לפונקציה בנקודת הפיתול** $(0,0)$ **ולכן** $f'(0) = 1$ **.**

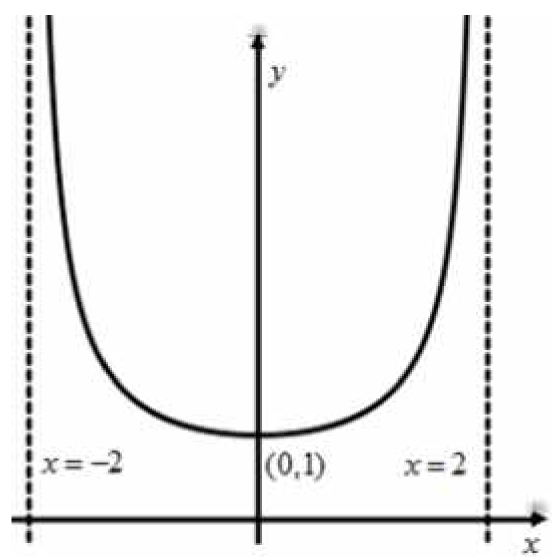
$1 = \frac{2a}{(a+0)(a-0)}$ **ונקבל ש-** $a = 2$ **.**

ראינו כי הפונקציה $f(x)$ **קעורה כלפי מטה עבור** $x < 0$ **, וקעורה כלפי מעלה עבור** $x > 0$ **,**

ובהתאם $f'(x)$ **יורדת עבור** $x < 0$ **, ועולה עבור** $x > 0$ **, כאשר** $(0,1)$ **מינימום.**

כמו כן לגרף של $f'(x) = \frac{4}{(2+x)(2-x)}$ **, המוגדרת בתחום** $-2 < x < 2$ **, יש אסימפטוטות אנכיות** $x = 2$ **ו-** $x = -2$ **.**

ובהתאם הסקיצה של גרף הנגזרת היא:



בגרות עה יולי 15 מועד קיץ ב שאלון 35807

א. נתונה הפונקציה $f(x)=-\frac{4e^x}{e^x-2}+e^x+4$ **.**

(1) בתחום ההגדרה מתקיים $e^x-2\neq 0$ **, ולכן** $e^x\neq 2$ **ו-** $x\neq \ell n\,2$ **.**

תשובה: $x\neq \ell n\,2$ **.**

(2) עבור $x\to \ell n\,2$ **הביטוי** $\frac{4e^x\to 4\ell n\,2}{e^x-2\to 0}+2+4$ **שואף ל-** $\pm\infty$ **ולכן הישר** $x=\ell n\,2$ **הוא אסימפטוטה.**

עבור $x\to -\infty$ **הביטוי** e^x **שואף ל-** 0 **ולכן** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\frac{4\cdot 0}{0-2}+0+4=4$ **ולכן הישר** $y=4$ **אסימפטוטה.**

תשובה: $x=\ell n\,2$ **,** $y=4$ **.**

(3) נמצא תחומי עלייה וירידה.

$$f'(x)=\frac{-4e^x(e^x-2)+4e^x\cdot e^x}{(e^x-2)^2}+e^x$$

$$f'(x)=e^x\cdot\frac{-4(e^x-2-e^x)+(e^x-2)^2}{(e^x-2)^2}$$

$$f'(x)=e^x\cdot\frac{8+e^{2x}-4e^x+4}{(e^x-2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=e^x\cdot\frac{e^{2x}-4e^x+12}{(e^x-2)^2}}$$

הביטוי $e^{2x}-4e^x+12$ **אינו מתאפס והוא חיובי לכל** x

(אם נסמן $e^x=t$ **נקבל פרבולה ישרה שאינה מתאפסת), וגם שאר הביטויים בנגזרת חיוביים.**

תשובה: הפונקציה עולה עבור $x>\ell n\,2$ **או** $x<\ell n\,2$ **ויורדת לאף** x **.**

(4) נמצא את נקודות החיתוך של $f(x)$ **עם הצירים.**

$$f(0)=-\frac{4e^0}{e^0-2}+e^0+4=4+1+4=9 \quad\to \boxed{(0,9)}\ .$$

$$0=-\frac{4e^x}{e^x-2}+e^x+4$$

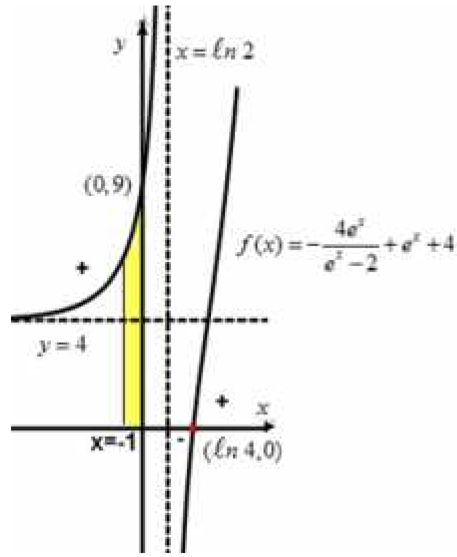
$$0=-4e^x+e^{2x}-2e^x+4e^x-8$$

$$0=e^{2x}-2e^x-8=(e^x-4)(e^x+2)$$

$$x=\ell n\,4 \quad\to \boxed{(\ell n\,4,0)}$$

תשובה: נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם הצירים הן:** $(\ell n\,4,0)$, $(0,9)$ **.**

(5) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ (כולל סימון השטח עבור סעיף ב, וחיוביות/ שליליות עבור סעיף ג).



ב. נחשב את גודל השטח הצהוב, על פי זיהוי הנגזרת הפנימית (של מכנה הביטוי השמאלי בתבנית הפונקציה).

$$S=\int_{-1}^{0}-\frac{4e^x}{e^x-2}+e^x+4-0)\,dx$$

$$S=\int_{-1}^{0}-4\cdot\frac{1}{e^x-2}\cdot e^x+e^x+4)\,dx$$

$$S=-4\cdot\ell n\left|e^x-2\right|+e^x+4x\,\Big]_{-1}^{0}$$

$$S=-4\cdot\ell n\,1+e^0+4\cdot 0-\left[-4\cdot\ell n\,(2-\frac{1}{e})+e^{-1}+4\cdot(-1)\right]$$

$$S=4\ell n\;(2-\frac{1}{e})+5-\frac{1}{e}\approx 6.592$$

הערה: בתחום $x<\ell n\,2$ **ניתן לרשום ש:** $\int\frac{1}{e^x-2}=\ell n(-(e^x-2))+c=\ell n(2-e^x)+c$ **, במקום רישום בערך מוחלט.**

תשובה: השטח המוגבל הוא $4\ell n\;(2-\frac{1}{e})+5-\frac{1}{e}\approx 6.592$ **יח"ר.**

ג. נתונה הפונקציה $F(x)=\int f(x)dx$ **, בתחום** $x>\ell n\,2$ **.**

מכאן ש: $F'(x)=f(x)$ **.**

תחומי העלייה והירידה של $F(x)$ **נקבעים, בהתאם, על פי תחומי החיוביות/ שליליות של** $f(x)$ **.**

על פי הגרף שבסעיף א (5) נקבל

שתחומי העלייה והירידה של $F(x)$ **הם: עלייה** $x>\ell n\,4$ **וירידה** $\ell n\,2<x<\ell n\,4$,

ובהתאם שיעור ה- x **של נקודת הקיצון של הפונקציה** $F(x)$ **הוא** $x=\ell n\,4$ **(מינימום).**

תשובה: $x=\ell n\,4$ **.**