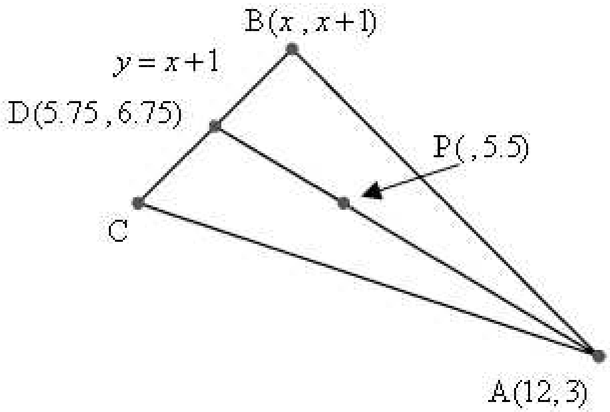


א. משמאל הסרטוט המתאים:

נקודת מפגש התיכונים מחלקת את התיכון ביחס $2:1$ **.**

$5.5=\frac{3+2y_D}{3} \rightarrow y_D=6.75$ **ולכן שיעורי הנקודה** D

שעל הצלע $y=x+1$ **הם** $D(5.75\,,6.75)$ **.**

נסמן את שיעורי קדקוד $B(x,\ x+1)$ **.**

ע"פ נוסחת אמצע קטע

$$\left.\begin{aligned} 5.75=\frac{x+x_C}{2} &\rightarrow x_C=11.5-x \\ 6.75=\frac{x+1+y_C}{2} &\rightarrow y_C=12.5-x \end{aligned}\right\} C(11.5-x,12.5-x)$$

נמצא את אורך הגובה, מ- $A\,(12,3)$ **לישר** $-x+y-1=0$ **:**

$$h=\frac{|-12+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5\sqrt{2}$$

נמצא את אורך BD **:**

$$12.5=\frac{2BD\cdot 5\sqrt{2}}{2} \rightarrow BD=\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{4}=\sqrt{(x-5.75)^2+(x+1-6.75)^2}$$

$$\frac{25}{8}=(x-5.75)^2+(x-5.75)^2$$

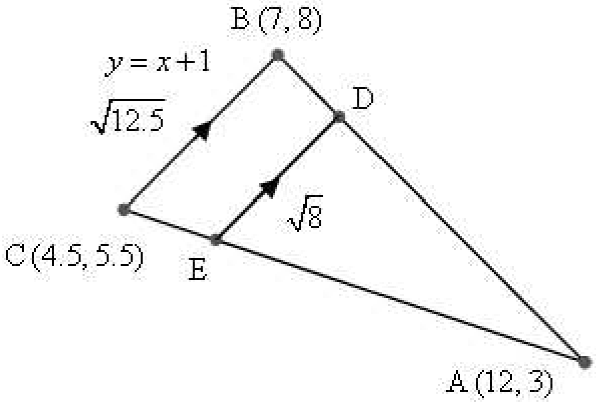
$$\frac{25}{8}=2(x-5.75)^2$$

$$(x-5.75)^2=\frac{25}{16}$$

$$x-5.75=1.25 \rightarrow x=7 \rightarrow \boxed{B(7,8)}$$

$$x-5.75=-1.25 \rightarrow x=4.5 \rightarrow \boxed{C\,(4.5,\,5.5)}$$

תשובה: $B\,(7,8)$ **,** $C\,(4.5,\,5.5)$ **מבלי להגביל את הכלליות (ניתן להחליף בין שמות הקודקודים)**



ב. נשתמש במשפט תאלס, כיוון ש- $\mathrm{BC} \parallel \mathrm{DE}$ **.**

$$\mathrm{BC} = \sqrt{(7-4.5)^2 + (8-5.5)^2} = \sqrt{12.5}$$

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BC}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12.5}} = \frac{4}{5}$$

הנקודה E **מחלקת את הצלע** AC **ביחס** $4:1$

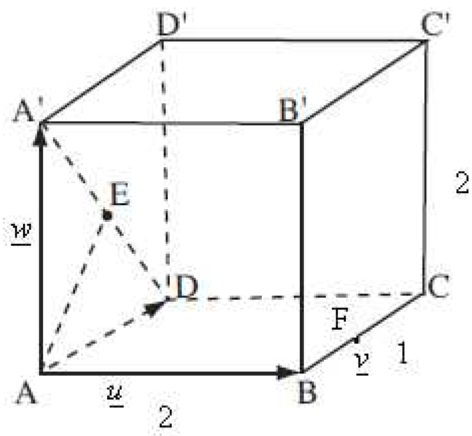
$$\left.\begin{aligned} x_{\mathrm{E}} &= \frac{12\cdot1+4.5\cdot4}{5} = 6 \\ y_{\mathrm{E}} &= \frac{3\cdot1+4.5\cdot5.5}{5} = 5 \end{aligned}\right\} \mathrm{E}(6,5)$$

שיפוע הישר BE **שווה לשיפוע הצלע** BC**, שהוא** 1**.**

ובהתאם משוואת הישר BE **היא** $y = x-1$

תשובה: $y = x-1$.

א. מקצועות התיבה מאונכים זה לזה, ואורכיהם נתונים.



$\boxed{\overrightarrow{AB} = \underline{u}}$ $\quad |\underline{u}| = 2 \quad \underline{u}^2 = 4$

$\boxed{\overrightarrow{AD} = \underline{v}}$ $\quad |\underline{v}| = 1 \quad \underline{v}^2 = 1$

$\boxed{\overrightarrow{AA'} = \underline{w}}$ $\quad |\underline{w}| = 2 \quad \underline{w}^2 = 4$

$\underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$

$$\cos \sphericalangle EAF = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AF}|}$$

$$\overrightarrow{BF} = t\overrightarrow{BC}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BF} = t\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AF} = \underline{u} + t\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = (\frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w})(\underline{u} + t\underline{v})$$

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}t\underline{v}^2 = \frac{1}{2}t \cdot 1 = 0.5t \quad \leftarrow \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

$$|\overrightarrow{AE}| = \left|\frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}\underline{v}^2 + \frac{1}{4}\underline{w}^2} = 0.5\sqrt{1+4} = 0.5\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{AF}| = |\underline{u} + t\underline{v}| = \sqrt{\underline{u}^2 + t^2\underline{v}^2} = \sqrt{4+t^2}$$

נבדוק האם זווית $\sphericalangle EAF$ **יכולה להיות בת** $30°$

$$\cos 30° = \frac{0.5t}{0.5\sqrt{5}\sqrt{4+t^2}}$$

$$\sqrt{4+t^2} = \frac{2t}{\sqrt{15}}$$

$$4 + t^2 = \frac{4t^2}{15}$$

$$t^2 = -\frac{60}{11} < 0$$

ולכן $\sphericalangle EAF$ **אינה יכולה להיות בת** $30°$

תשובה: לא קיים ערך של t **עבורו** $\sphericalangle EAF = 30°$.

ב. (1) נמצא את הערך של t **שעבורו** $\cos\sphericalangle EAF=\frac{1}{5}$

$$\frac{1}{5}=\frac{0.5t}{0.5\sqrt{5}\sqrt{4+t^2}}$$
$$\sqrt{4+t^2}=t\sqrt{5}$$
$$4+t^2=5t^2$$
$$t^2=1$$
$$t=1 \quad \rightarrow \sqrt{4+1^2}=1\sqrt{5} \quad \rightarrow \sqrt{5}=\sqrt{5} \quad o.k.$$
$$t=-1 \quad \rightarrow \sqrt{4+(-1)^2}=-1\sqrt{5} \quad \rightarrow \sqrt{5}=-\sqrt{5} \quad not\ o.k$$

תשובה: $t=1$

(2) עבור $t=1$ **נקבל** $\overrightarrow{BF}=1\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}$

תשובה: הנקודה F **מתלכדת עם הקדקוד** C**, בקצה הקטע** BC**.**

ג. אם EF **מקביל למישור הפאה** ABB'A'**, אזי** $\overrightarrow{EF}=\sim\underline{u}+\ \ \underline{w}$

כי כל וקטור במישור, או וקטור מקביל למישור, ניתן להצגה כקומבינציה ליניארית של שני וקטורים במישור, שאינם תלויים זה בזה.

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}$$
$$\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{w}+\underline{u}+t\underline{v}$$
$$\boxed{\overrightarrow{EF}=\underline{u}+(t-\frac{1}{2})\underline{v}+-\frac{1}{2}\underline{w}}$$

ולכן $t-\frac{1}{2}=0 \quad \rightarrow t=\frac{1}{2}$

תשובה: הנקודה F **מחלקת את הקטע** BC **ביחס של** 1:1 **.**

פתרון חלופי:

EF **מקביל למישור הפאה** ABB'A'**, ולכן מרחק הנקודה** E **מהפאה שווה למרחק** F **מהפאה.**

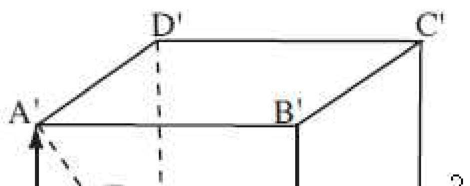
כיוון שמרחק E **מהפאה הוא מחצית מהמקצוע** AD**,**

(כי הפאות הצדדיות מאונכות זו לזו, ולכן מרחק E **מהפאה הוא מרחקה מישר החיתוך** AA'**),**

אז מרחק F **מהפאה הוא מחצית מהמקצוע** BC**, ולכן הנקודה** F **מחלקת את הקטע** BC **ביחס של** 1:1 **.**

ד. אם ΔAED **הוא בסיס הפירמידה** AEDF**, הרי שאורך הגובה הוא מרחק הנקודה** F **מהבסיס.**

כאשר מרחק זה הוא המרחק בין הישר BC **לבסיס, כלומר** $|\underline{u}|=2$ **ואינו תלוי במיקום** F **על הישר.**



שטח בסיס הפירמידה, כלומר ΔAED**, הוא רבע משטח הפאה** DD'A'

שכן האלכסון DA' **חוצה את הפאה המלבנית לשני משולשים שווי שט**

והתיכון AE **חוצה את** $\Delta A'AD$ **לשני משולשים שווי שטח.**

שטח ΔAED **הוא** 0.5 **יח"ר** $=0.5\cdot 0.5\cdot 2\cdot 1$**.**

נפח הפירמידה הוא $\frac{1}{3}$ **יח"ק** $= \frac{0.5\cdot 2}{3}$

תשובה: נפח הפירמידה $AEDF$ **הוא** $\frac{1}{3}$ **יח"ק.**

א. נתונה הסדרה $i,\quad i^2,\quad i^3,...,\quad i^n,...$ **, שהיא סדרה הנדסית ומנתה** i **, כי** $\frac{i^{n+1}}{i^n}=i$ **קבוע שאינו תלוי ב-** n **.**

למספר המרוכב i **קיימת מחזוריות:** $i, i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$ **והמחזור מתחיל מחדש.**

הנקודות המתאימות במישור גאוס הן: $(1,0)\quad(0,-1),\quad(-1,0),\quad(0,1),$**.**

שהן קדקודים של מעוין (אורכי כל הצלעות $\sqrt{2}$**) שאלכסוניו שווים זה לזה** (2)**,**

ולכן זה ריבוע, שחסום ע"י מעגל היחידה $x^2+y^2=1$ **, כי הוא עובר בכל אחד מהקדקודים.**

ב. (1) $S_{4n}=\frac{i(i^{4n}-1)}{i-1}=\frac{i((i^4)^n-1)}{i-1}=\frac{i(1^n-1)}{i-1}=\frac{i(1-1)}{i-1}=0$

תשובה: סכום $4n$ **איברים ראשונים של הסדרה הוא מספר ממשי** (0)

(2) $S_{19}=S_{20}-a_{20}=0-1=-1$ **, כי** $S_{20}=0$ **, על פי סעיף ב(1) ו-** $a_{20}=1$ **על פי המחזוריות של המספר המרוכב** i **.**

תשובה: $S_{19}=-1$

ג. (1) נתונה הסדרה $z_1,\quad z_2,\quad z_3,...,\quad z_n$ **, שאיבריה מיוצגים ע"י** n **קדקודים של מצולע משוכלל בעל** n **צלעות החסום במעגל היחידה** $x^2+y^2=1$ **, כאשר** $z_1=1$ **והקדקודים מסודרים נגד כיוון השעון.**

הארגומנט של $z_1=1$ **הוא** 0 **. מכיוון שכל זוויות המצולע שוות זו לזו,**

הרי שהארגומנטים של המספרים המרוכבים, קדקודי המצולע, גדלים ב- $\frac{360°}{n}$ **או** $\frac{2®}{n}$ **ברדיאנים.**

ולכן הם מהווים סדרה הנדסית שמנתה $cis(\frac{2®}{n})$**.**

$$z_n=1\cdot(cis(\frac{2®}{n}))^{n-1}=cis(\frac{2®(n-1)}{n})$$

תשובה: $z_n=cis(\frac{2®(n-1)}{n})$

(2) המשוואה המתאימה היא $z^n=1$ **, או** $z^n=cis(0)$ **כפי שגם ראינו בסעיף א וגם בסעיף ג(1).**

נוכיח זאת באמצעות נוסחת השורשים של מספר מרוכב.

$$z_k=cis(\frac{0°+360°k}{n})$$

$$\frac{z_{k+1}}{z_k}=\frac{cis(\frac{360°(k+1)}{n})}{cis(\frac{360°k}{n})}=cis(\frac{360°(k+1)}{n}-\frac{360°k}{n})=cis\frac{360°}{n}=cis\frac{2®}{n}$$

תשובה: הראינו שפתרונות המשוואה מהווים את הסדרה שהוגדרה בסעיף ג,
ובהתאם מיצגים את הקדקודים של המצולע המשוכלל.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\ell n(1+e^{-x})+\frac{1}{3}x$

כיוון ש- $1+e^{-x}$ **חיובי לכל** x **, הרי שהפונקציה מוגדרת לכל** x **.**

תשובה: תחום ההגדרה: כל x **.**

ב. נמצא את נגזרת הפונקציה ואת השיפוע עבור $x=0$ **.**

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{1}{3}=\frac{-3e^{-x}+1+e^{-x}}{3(1+e^{-x})}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1-2e^{-x}}{3(1+e^{-x})}}$$

$$f'(0)=\frac{1-2e^{-0}}{3(1+e^{-0})}=\frac{1-2}{3(1+1)}=-\frac{1}{6}$$

נמצא את שיפוע המיתר בין הנקודות M **ו-** N **ששיעורי ה-** x **שלהם נגדיים.**

$$\mathrm{M}(x_0,\ \ell n(1+e^{-x_0})+\frac{1}{3}x_0)$$

$$\mathrm{N}(-x_0,\ \ell n(1+e^{x_0})-\frac{1}{3}x_0)$$

$$m_{\mathrm{MN}}=\frac{\ell n(1+e^{-x_0})+\frac{1}{3}x_0-(\ell n(1+e^{x_0})-\frac{1}{3}x_0)}{x_0-(-x_0)}$$

$$m_{\mathrm{MN}}=\frac{\ell n(1+e^{-x_0})-\ell n(1+e^{x_0})+\frac{1}{3}x_0+\frac{1}{3}x_0}{x_0+x_0}$$

$$m_{\mathrm{MN}}=\frac{\ell n(\frac{1+e^{-x_0}}{1+e^{x_0}})+\frac{2}{3}x_0}{2x_0}=\frac{\ell n(\frac{1+\frac{1}{e^{x_0}}}{1+e^{x_0}})+\frac{2}{3}x_0}{2x_0}=\frac{\ell n(\frac{\frac{e^{x_0}+1}{e^{x_0}}}{1+e^{x_0}})+\frac{2}{3}x_0}{2x_0}=\frac{\ell n(\frac{1}{e^{x_0}})+\frac{2}{3}x_0}{2x_0}$$

$$m_{\mathrm{MN}}=\frac{\ell ne^{-x_0}+\frac{2}{3}x_0}{2x_0}=\frac{-x_0\ell ne+\frac{2}{3}x_0}{2x_0}=\frac{-x_0+\frac{2}{3}x_0}{2x_0}=\frac{-\frac{1}{3}x_0}{2x_0}=-\frac{1}{6}$$

תשובה: $f'(0)=m_{\mathrm{MN}}\ (=-\frac{1}{6})$ **.**

ג. הפונקציה $f'(x)=\frac{1-2e^{-x}}{3(1+e^{-x})}$ **מוגדרת עבור כל** x **ולכן אין אסימפטוטה אנכית .**

אסימפטוטות אופקיות, כאשר $x\to\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2e^{-x}}{3(1+e^{-x})}=\frac{1}{3(1+0)}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-2e^{-x}}{3(1+e^{-x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{e^{-x}}-2}{3(\frac{1}{e^{-x}}+1)}=\frac{0-2}{3(0+1)}=-\frac{2}{3}$$

ניתן למצוא אסימפטוטות אופקיות גם בעזרת טבלת ערכי הנגזרת

x	10	15	20	-10	-20	-30
y	0.333287	0.33333333331	0.33333333333	-0.66662	-0.666666664	-0.6666666666

תשובה: $y=\frac{1}{3},\quad y=-\frac{2}{3}$

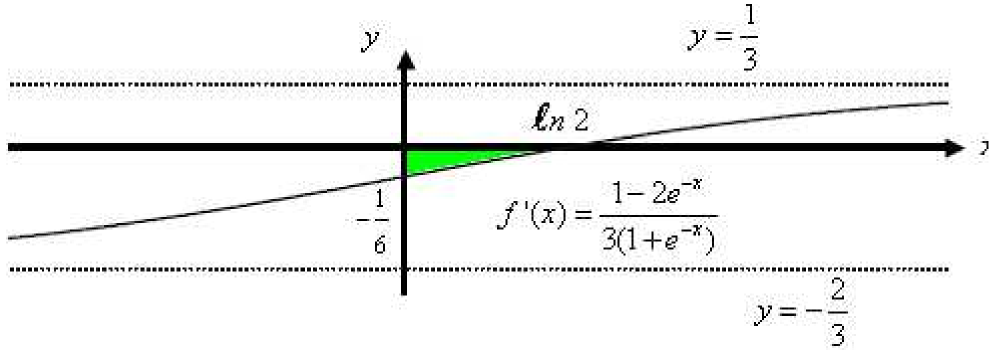
ג (1) נמצא מתי $f'(x)=\frac{1-2e^{-x}}{3(1+e^{-x})}$ **שלילית ונשים לב שמכנה הנגזרת חיובי וסימן המנה ייקבע ע"י המונה.**

$$1-2e^{-x}<0\quad\to e^{-x}>0.5\quad\to -x>\ell n\,0.5\quad\to x<-\ell n\,0.5\quad x<\ell n\,0.5^{-1}\quad\to x<\ell n\,2$$

תשובה: $x<\ell n\,2$

(2) מצאנו כי $f'(0)=-\frac{1}{6}$ **וכי הנגזרת שלילית עבור** $x<\ell n\,2$ **ובהתאם ניתן לצייר סקיצה של גרף הנגזרת.**

וגם את האסימפטוטות האופקיות של הנגזרת, ובהתאם ניתן לצייר סקיצה של גרף הנגזרת.



$$S=\int_0^{\ell n 2}(0-f'(x))\,dx$$

$$S=-f(x)\Big]_0^{\ell n 2}=S=(-\ell n(1+e^{-\ell n 2})-\frac{1}{3}\ell n\,2)-(-\ell n(1+e^{-0})-\frac{1}{3}\cdot 0)=$$

$$S=-\ell n\,1.5-\frac{1}{3}\ell n\,2+\ell n\,2=\frac{2}{3}\ell n\,2-\ell n\,1.5=\ell n\sqrt[3]{4}-\ell n\,1.5$$

$$\boxed{S=\ell n\frac{\sqrt[3]{4}}{1.5}=0.0566}$$

תשובה: גודל השטח $\ell n\frac{\sqrt[3]{4}}{1.5}=0.0566$ **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\ell n\,(x^2+a)$, כאשר $a>0$ פרמטר חיובי.

הביטוי x^2+a חיובי לכל x עבור $a>0$ ולכן הפונקציה מוגדרת לכל x .

תשובה: תחום ההגדרה הוא כל x

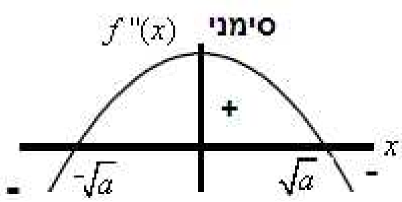
ב. לפונקציה $f(x)$ נקודת פיתול בנקודה שבה $y=3\ell n\,2$.

הסבר: נתון שבנקודות אלה ערכי השיפועים מקסימלים ומינימלים.

ערכי השיפוע שווים לערכי הנגזרת, ומקבלים ערכי קיצון כאשר הנגזרת השנייה מתאפסת, ומחליפה סימן.

לכן, אלו נקודות הפיתול של הפונקציה.

$$f(x)=\ell n\,(x^2+a) \quad \rightarrow f'(x)=\frac{2x}{x^2+a}$$



$$f''(x)=\frac{2(x^2+a)-2x\cdot x}{(x^2+a)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2a-2x^2}{(x^2+a)^2}$$

$$0=2a-2x^2 \quad \rightarrow 2x^2=2a \quad \rightarrow x^2=a \quad \rightarrow x=\pm\sqrt{a}$$

על פי ציור גרף סימני הנגזרת השנייה (מכנה חיובי),

ניתן לראות שנקודות אלו הן נקודות פיתול, כלומר בהן השיפועים מכסימליים ומינימלים.

כלומר שאחת מנקודת הפיתול היא $(\sqrt{a},3\ell n\,2)$ ונציב את שיעוריה בתבנית הפונקציה:

$$3\ell n\,2=\ell n\,(\sqrt{a}^2+a)$$

$$\ell n\,2^3=\ell n\,(a+a)$$

$$8=2a$$

$$\boxed{a=4}$$

תשובה: $a=4$

נציב $a=4$ ונקבל $f(x)=\ell n\,(x^2+4)$, $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+4}$.

ג. השיפוע המקסימלי מתקבל כאשר הנגזרת השנייה עוברת מעליה לירידה, עבור $x=\sqrt{4}=2$

בהתאם: $m=f'(2)=\dfrac{2\cdot 2}{2^2+4}=\dfrac{1}{2}$

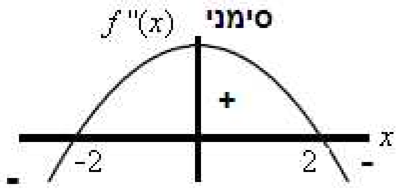
השיפוע המינימלי מתקבל כאשר הנגזרת השנייה עוברת מירידה לעלייה, עבור $x=-\sqrt{4}=-2$.

בהתאם: $m=f'(-2)=\dfrac{2\cdot(-2)}{(-2)^2+4}=-\dfrac{1}{2}$

תשובה: השיפוע המקסימלי הוא $\dfrac{1}{2}$, השיפוע המינימלי הוא $-\dfrac{1}{2}$.

ב. (1) נמצא את נקודות הקיצון

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+4}$, **כלומר הנגזרת מתאפסת עבור** $x=0$ **, ובהתאם** $f(0)=\ell n\,(0^2+4)=\ell n\,4$



כאשר $f''(0)>0$ **על פי גרף סימני הנגזרת השנייה ולכן זו נקודת מינימו**

$$f''(\sqrt{e})=\frac{3-2\ell n\sqrt{e}}{+}=\frac{2}{+}>0$$

תשובה: $(0,\ell n\,4)$ **מינימום.**

(2) נמצא את תחומי קעירות כלפי מעלה/ מטה על פי גרף סימני הנגזרת השנייה

כאשר נקודות הפיתול הן $-(2,3\ell n\,2)$, $(2,3\ell n\,2)$

תשובה: קעירות כלפי מעלה $\cup$ **-** $-2<x<2$ **, קעירות וכלפי מטה** $\cap$ **-** $x>2$ **או** $x<-2$

(3) הסקיצה המתאימה: