א. נסדר את הנתונים בטבלה נוחה.

	a_n	b_n
האיבר הראשון	a_1	$b_1 = a_1$
הפרש הסדרה	d	$d+1$
מספר האיברים	n	n

נתון כי a_4 **גדול ב-** 2 **מ-** b_3**, והמשוואה המתאימה היא:** $b_3 + 2 = a_4$.

$$b_3 + 2 = a_4$$
$$b_1 + 2d_b + 2 = a_1 + 3d_a$$
$$a_1 + 2(d+1) + 2 = a_1 + 3d$$
$$2d + 4 = 3d$$
$$\boxed{d = 4}$$

תשובה: $d = 4$.

ב. נראה כי $b_n = a_n + n - 1$ **(ניעזר בסימן שקילות** $(\Leftrightarrow)$**, בדומה להוכחת זהויות בטריגו).**

$$b_n = a_n + n - 1$$
$$\Leftrightarrow b_1 + d_b(n-1) = a_1 + d_a(n-1) + n - 1$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 5(n-1) = a_1 + 4(n-1) + n - 1$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 5n - 5 = a_1 + 4n - 4 + n - 1$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 5n - 5 = a_1 + 5n - 5 \quad o.k.$$

תשובה: הוכַח ש-$b_n = a_n + n - 1$.

ג. נתון כי בכל אחת מהסדרות יש n **איברים.**

$$S_n^b - S_n^a = \frac{n\cdot\left[2\cdot b_1 + 5\cdot(n-1)\right]}{2} - \frac{n\cdot\left[2\cdot a_1 + 4\cdot(n-1)\right]}{2}$$
$$S_n^b - S_n^a = \frac{n\cdot\left\{\left[2\cdot a_1 + 5\cdot(n-1)\right] - \left[2a_1 + 4\cdot(n-1)\right]\right\}}{2}$$
$$S_n^b - S_n^a = \frac{n\cdot\left[2a_1 + 5n - 5 - (2a_1 + 4n - 4)\right]}{2}$$
$$S_n^b - S_n^a = \frac{n\cdot(2a_1 + 5n - 5 - 2a_1 - 4n + 4)}{2}$$
$$\boxed{S_n^b - S_n^a = \frac{n\cdot(n-1)}{2}}$$

או, עפ"י סעיף ב:

$$S_n^b - S_n^a = \frac{n\cdot\left[b_1 + b_n\right]}{2} - \frac{n\cdot\left[a_1 + a_n\right]}{2}$$
$$S_n^b - S_n^a = \frac{n\cdot\left[b_1 + b_n - (a_1 + a_n)\right]}{2}$$
$$S_n^b - S_n^a = \frac{n\cdot(a_1 + b_n - a_1 - a_n)}{2}$$
$$S_n^b - S_n^a = \frac{n\cdot(b_n - a_n)}{2}$$
$$\boxed{S_n^b - S_n^a = \frac{n\cdot(n-1)}{2}}$$

תשובה: $S_n^b - S_n^a = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$.

ד. נתון: $S_n^b - S_n^a = 780$ **.**

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2}=780$$

$$n^2-n=1560$$

$$n^2-n-1560=0$$

$$\boxed{n=40}\ o.k.$$

$$n=-39\ \ false, n\ is\ natural$$

נתון: $S_n^a = 3,040$.

$$\frac{40\cdot\left[2\cdot a_1+4\cdot(40-1)\right]}{2}=3040$$

$$2a_1+156=152$$

$$2a_1=-4$$

$$\boxed{a_1=-2}$$

תשובה: $a_1=-2$ **.**

א. בסיס הפירמידה הישרה SABCD הוא ריבוע.

נתון כי שטח בסיס הפירמידה הוא $4a^2$ ($a>0$ פרמטר).

שטח ריבוע שווה למחצית מכפלת האלכסונים, השווים זה לזה.

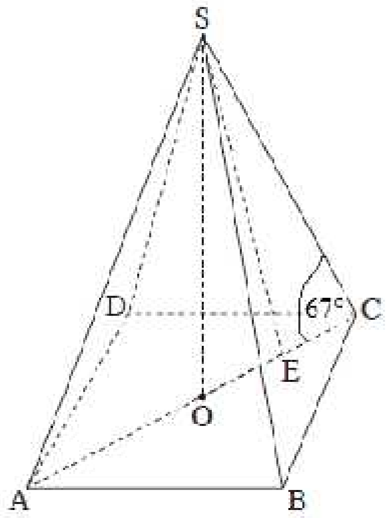
נסמן k - אורך אלכסון הריבוע.

$$4a^2 = \frac{k^2}{2}$$

$$8a^2 = k^2$$

$$\boxed{2a\sqrt{2} = k}$$

תשובה: אורך אלכסון הבסיס הוא $2a\sqrt{2}$.



ב. הגובה, בפירמידה ישרה, יורד למרכז המעגל החוסם,

שהוא מפגש אנכים אמצעיים,

ובמקרה זה, של הריבוע, למפגש האלכסונים.

נתונה הזווית שבין מקצוע צדדי ובין בסיס הפירמידה, $\sphericalangle SCO = 67°$.

:$\underline{\Delta SOC}$

$$\tan \sphericalangle SOC = \frac{SO}{OC}$$

$$\tan 67° = \frac{SO}{a\sqrt{2}}$$

$$a\sqrt{2}\tan 67° = SO$$

$$\boxed{SO = 3.332a}$$

תשובה: גובה הפירמידה, SO, הוא $3.332a$.

ג. נתון כי נפח הפירמידה שווה ל- 15 .

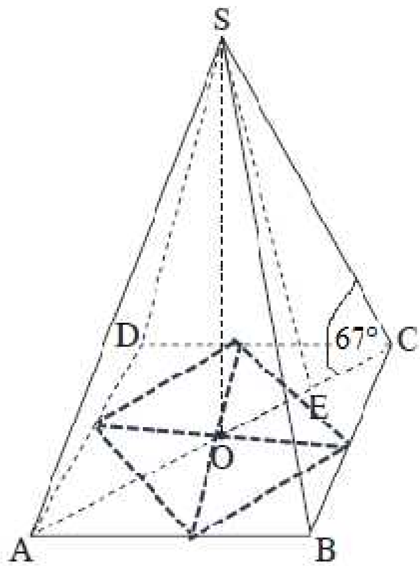
(1) נחשב את ערכו של a.

$$15=\frac{4a^2\cdot 3.32a}{3}$$

$$3.377=a^3$$

$$\boxed{a=1.5}$$

תשובה: $a=1.5$.



(2) הנקודה E היא אמצע הקטע OC.

$$AE=\frac{3}{4}AC=\frac{3}{4}\cdot 2a\sqrt{2}=\frac{3}{4}\cdot 2\cdot 1.5\sqrt{2}=3.182$$

$$S_{\Delta ASE}=\frac{AE\cdot SO}{2}$$

$$S_{\Delta ASE}=\frac{3.182\cdot 3.332a}{2}$$

$$S_{\Delta ASE}=\frac{3.182\cdot 3.332\cdot 1.5}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ASE}=7.95}$$

תשובה: שטח המשולש ASE הוא 7.95.

ד. חיברו את אמצעי צלעות הבסיס לקודקוד הפירמידה, S, כך שנוצרה פירמידה חדשה.

כל צלע של הבסיס החדש היא קטע אמצעים במשולש, שהוא חצי מהבסיס המקורי,

וכל אלכסון של הבסיס החדש שווה לצלע של הבסיס המקורי (של ABCD).

מכאן ששטח הבסיס החדש הוא חצי מהשטח המקורי (חצי מכפלת האלכסונים).

נפח הפירמידה החדשה (שלה אותו גובה, SO) הוא חצי מהנפח המקורי, כלומר: $15:2=7.5$.

תשובה: נפח הפירמידה החדשה הוא 7.5 .

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2-\cos^2 x$, **המוגדרת בתחום** $-\frac{2\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}$ **.**

נשים לב שהפונקציה זוגית, כי $f(x)=f(-x)$ **(גם נוכיח בסעיף ג), ולכן הגרף שלה סימטרי לציר ה-** y **).**

נקודות קצה: $(\frac{2\pi}{3},1.75)$ **,** $(-\frac{2\pi}{3},1.75)$ **.**

(מומלץ להתחיל עם נקודות קצה, אם קיימות, שתהיינה גם נקודות קיצון.)

$f'(x)=-2\cos x(-\sin x)$

$\boxed{f'(x)=\sin 2x}$

$0=\sin 2x=\sin 0$

$2x=2\pi k \quad 2x=\pi+2\pi k$

$x=\pi k \qquad x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

$k=0:\boxed{(0,1)} \qquad k=0:\boxed{(\frac{\pi}{2},2)}$

$k=-1:\boxed{(-\frac{\pi}{2},2)}$

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, וסוג הקיצון, בעזרת ערכי הפונקציה.

(סימני הנגזרת הוספו, כי לעיתים נדרש לצייר את גרף הנגזרת.)

x	$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
$f(x)$	1.75		2		1		2		1.75
$f'(x)$		+		-		+		-	
מסקנה	Min	↗	Max	↘	Min	↗	Max	↘	Min

תשובה: $(\frac{2\pi}{3},1.75)$ **מינימום,** $(\frac{\pi}{2},2)$ **מקסימום,** $(0,1)$ **מינימום,** $(-\frac{\pi}{2},2)$ **מקסימום,** $(-\frac{2\pi}{3},1.75)$ **מינימום .**

ב. על פי טבלת העלייה והירידה, הערך המינימלי של הפונקציה, בתחום $-\frac{2\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}$ **, הוא** 1**.**

תשובה: לגרף הפונקציה $f(x)$ **אין נקודת חיתוך עם ציר ה-** x **.**

ג. נראה שהפונקציה $f(x)=2-\cos^2 x$ **זוגית .**

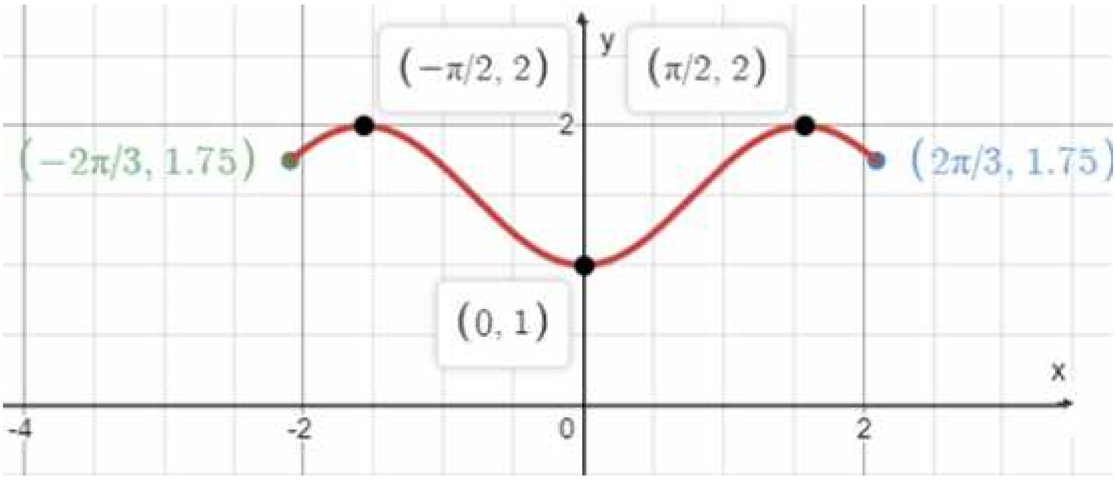
$f(-x)=2-\cos^2(-x)$

$f(-x)=2-\cos^2 x \quad \leftarrow \cos(-x)=\cos x$

$f(-x)=f(x)$

תשובה: הפונקציה היא זוגית.

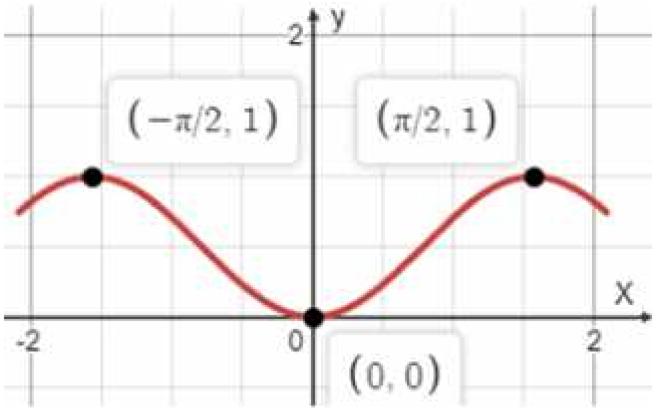
ד. סקיצה מתאימה של $f(x)=2-\cos^2 x$.



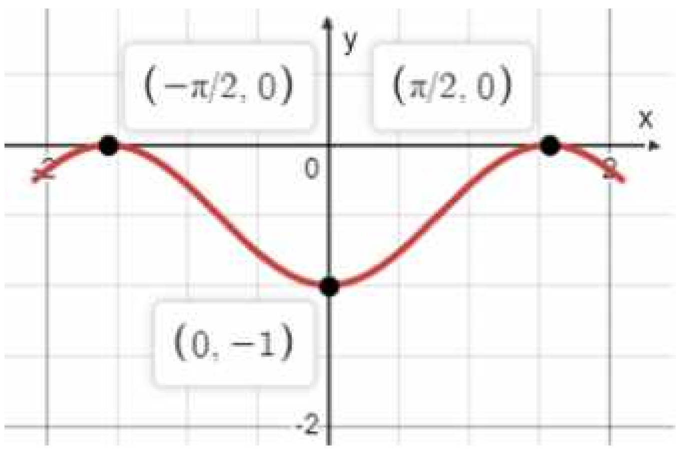
ה. $g(x)=f(x)+c$, היא תזוזה של הגרף של $f(x)$ כלפי מעלה עבור c חיובי, וכלפי מטה עבור c שלילי .

נראה שקיימות שתי אפשריות לערכו של c, שעבורו גרף הפונקציה $f(x)$ ישיק לציר ה- x .

אם נוריד את הגרף של $f(x)$ 1 יחידה כלפי מטה, נקבל את הסקיצה הבאה (השקה אחת לציר ה- x).



אם נוריד את הגרף של $f(x)$ 2 יחידות כלפי מטה, נקבל את הסקיצה הבאה (שתי השקות לציר ה- x).



תשובה: $c=-1$, או $c=-2$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x-1}-1$ **, המוגדרות לכל** x **.**

(1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **.** $f(0)=e^{2\cdot0-1}-1=\frac{1}{e}-1\approx-0.632 \quad \rightarrow \boxed{(0,\frac{1}{e}-1)}$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$0=e^{2x-1}-1$$
$$1=e^{2x-1}$$
$$0=2x-1$$
$$x=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \boxed{(\frac{1}{2},0)}$$

תשובה: $(0,\frac{1}{e}-1)$ **,** $(\frac{1}{2},0)$**.**

(2) נראה שהפונקציה $f(x)$ **עולה לכל** x**.**

$$\boxed{f'(x)=2e^{2x-1}}$$
$$e^{2x-1}>0 \quad \rightarrow f'(x)>0$$

תשובה: $f(x)$ **עולה לכל** x **, כי הנגזרת חיובית לכל** x**.**

(3) כאשר x **שואף לפלוס אינסוף,** e^{2x-1} **שואף לאינסוף ואין אסימפטוטה אופקית.**

כאשר x **שואף למינוס אינסוף,** e^{2x-1} **שואף לאפס, ויש אסימפטוטה אופקית לשמאל:** $y=-1$ **.**

ניתן לראות זאת, ואפילו מומלץ, בעזרת הצבות.

$$f(10)=e^{2\cdot10-1}-1=178,482,300\rightarrow+\infty$$
$$f(-10)=e^{2\cdot(-10)-1}-1=-0.99999\rightarrow-1$$

תשובה: $y=-1$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל, עבור** $x\rightarrow-\infty$ **.**

ב. נתונה הפונקציה $\boxed{g(x)=e^{2-x}-1}$ **, המוגדרות לכל** x **.**

(1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **.** $f(0)=e^{2-0}-1=e^2-1\approx 6.389 \quad \rightarrow \boxed{(0,e^2-1)}$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$0=e^{2-x}-1$$
$$1=e^{2-x}$$
$$0=2-x$$
$$x=2 \quad \rightarrow \boxed{(2,0)}$$

תשובה: $(0,e^2-1)$ **,** $(2,0)$**.**

(2) נראה שהפונקציה $g(x)$ **יורדת לכל** x**.**

$$\boxed{g'(x)=-e^{2-x}}$$
$$e^{2-x}>0 \quad \rightarrow g'(x)<0$$

תשובה: $g(x)$ **יורדת לכל** x**, כי הנגזרת שלילית לכל** x **.**

(3) כאשר x **שואף לפלוס אינסוף,** e^{2-x} **שואף לאפס, ויש אסימפטוטה אופקית לימין:** $y=-1$**.**

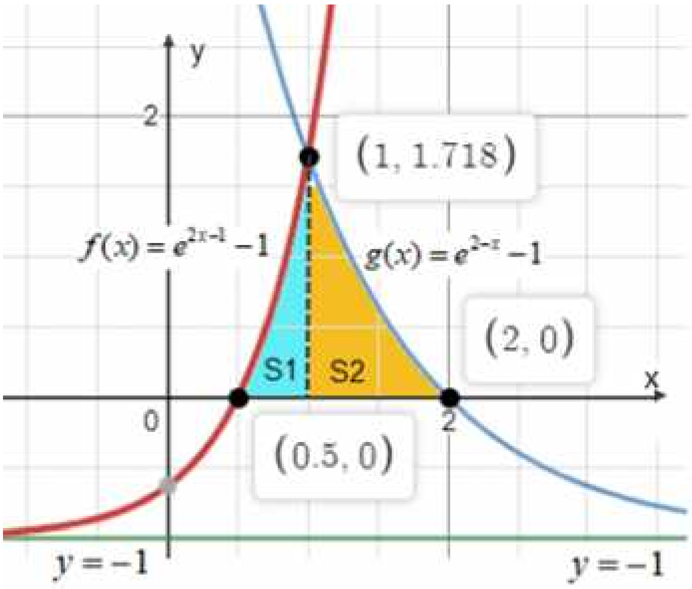
כאשר x **שואף למינוס אינסוף,** e^{2-x} **שואף לאינסוף ואין אסימפטוטה אופקית.**

ניתן לראות זאת, ואפילו מומלץ, בעזרת הצבות.

$$g(10)=e^{2-10}-1=-0.9997 \rightarrow -1$$
$$g(-10)=e^{2-(-10)}-1=162,753 \rightarrow +\infty$$

תשובה: $y=-1$ **אסימפטוטה אופקית לימין, עבור** $x\rightarrow+\infty$ **.**

ג. סקיצה של הפונקציות, כולל סימון של נקודת החיתוך ביניהם (סעיף ד), ושטחים מתאימים (סעיף ה).



ד. נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציות $f(x)$ **ו-** $g(x)$ **.**

$$\begin{cases} f(x)=e^{2x-1}-1 \\ g(x)=e^{2-x}-1 \end{cases}$$

$$e^{2x-1}-1=e^{2-x}-1$$

$$e^{2x-1}=e^{2-x}$$

$$2x-1=2-x \quad \to 3x=3$$

$$x=1 \quad \to y=e^{2-1}-1=e-1\approx 1.718 \quad \to \boxed{(1,e-1)}$$

תשובה: $(1,e-1)$ **.**

ה. נחשב את השטח המבוקש, על ידי חלוקתו לשני שטחים.

$$S_2=\int_1^2 (e^{2-x}-1)\,dx$$

$$S_2=\left(\frac{e^{2-x}}{-1}-x\right)\Big]_{1.}^{2}$$

$$\left.\begin{matrix} x=2: & -e^{2-2}-2=-3 \\ x=1: & -e^{2-1}-1=-e-1 \end{matrix}\right\} S_2=e-2$$

$$S_1=\int_{0.5}^{1} (e^{2x-1}-1)\,dx$$

$$S_1=\left(\frac{e^{2x-1}}{2}-x\right)\Big]_{0.5}^{1}$$

$$\left.\begin{matrix} x=1: & \frac{e^{2\cdot 1-1}}{2}-1=\frac{e}{2}-1 \\ x=0.5: & \frac{e^{2\cdot 0.5-1}}{2}-0.5=0 \end{matrix}\right\} S_1=\frac{e}{2}-1$$

וגודל השטח המבוקש: $S_1+S_2=S_1=\frac{e}{2}-1+e-2=1.5e-3\approx 1.077$ **.**

תשובה: גודל השטח המבוקש הוא $1.5e-3\approx 1.077$ **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1+\ell n\, x}{ax}$ **, כאשר** $a>0$ **פרמטר.**

בתחום ההגדרה מכנה אינו מתאפס, והביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית צ"ל חיובי.

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x>0$ **.**

ב. בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$0=\frac{1+\ell n\, x}{ax}$$

$$1+\ell n\, x=0$$

$$\ell n\, x=-1$$

$$x=e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0.368 \quad \to \boxed{(\frac{1}{e},0)}$$

אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y **, כי בתחום ההגדרה** $x>0$**.**

תשובה: $(\frac{1}{e},0)$**.**

ג. נמצא את שיעור ה- x **של נקודת הקיצון של** $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$f'(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ell n\, x)}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1-1-\ell n\, x}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x)=-\frac{1}{a}\cdot\frac{\ell n\, x}{x^2}}$$

$$0=\ell n\, x$$

$$\boxed{x=1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0.5)=(-)\cdot\frac{(-)}{(+)}>0 \\ f'(2)=(-)\cdot\frac{(+)}{(+)}<0 \end{array}\right\} \max$$

תשובה: $x=1$ **מקסימום.**

ד. נרשום את תחומי העלייה והירידה, על פי סוג בקיצון ותחום ההגדרה .

תשובה: $x>1$ **ירידה,** $0<x<1$ **עלייה.**

ה. נתון כי שיעור ה- y **של נקודת הקיצון הוא** $\frac{1}{4}$**, ומכאן שנקודת ההקיצון היא** $(1,\frac{1}{4})$ **.**

(1) נציב את שיעורי נקודת הקיצון בפונקציה $f(x)=\frac{1+\ell n\, x}{ax}$ **.**

$$\frac{1}{4}=\frac{1+\ell n 1}{a\cdot 1}$$
$$\frac{1}{4}=\frac{1}{a}$$
$$\boxed{a=4}$$

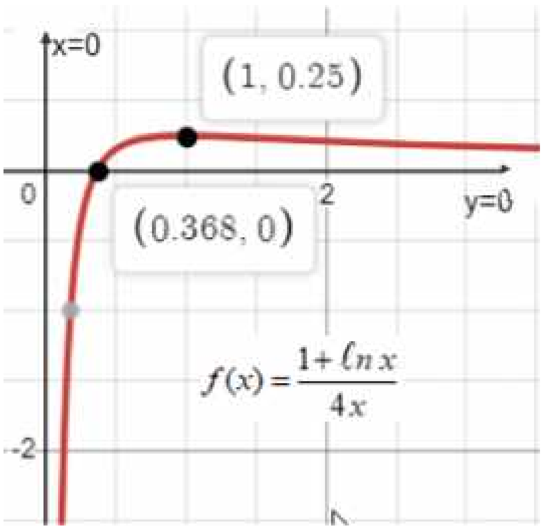
תשובה: $a=4$**.**

(2) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1+\ell n\, x}{4x}$ **.**

שתי הצבות ליתר ביטחון, בתוך תחום ההגדרה, למציאת האסימפטוטות .

כאשר $x\to+\infty$ **, למשל** $f(100)=0.014\to+0$ **, והישר** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

כאשר $x\to 0$ **, למשל** $f(0.001)=-1,476\to-\infty$ **, והישר** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**



ו. נתונה הפונקציה $g(x)=-f(x)$ **, אשר סימטרית לפונקציה** $f(x)$ **, כשציר הסימטריה שלהן הוא ציר ה-** x **.**

מכיוון שהנקודה $(1,\frac{1}{4})$ **הייתה מקסימום של** $f(x)$ **, הרי ש-** $(1,-\frac{1}{4})$ **היא מינימום של** $g(x)$ **.**

ניתן לראות גם ש- $g'(x)=-f'(x)$ **, ולכן תחומי העלייה והירידה מתחלפים,**

כאשר הנגזרת מתאפסת עבור אותו $x=1$ **, אולם ערכי הפונקציות הופכיים.**

תשובה: $(1,-\frac{1}{4})$**, מינימום.**