מרץ 2007

<u>לתלמידי 4 ו - 5 יח"ל במתמטיקה</u>

<u>סיכום לשאלון 005</u>

חוברת זו מוגשת לכם מתוך הערכה

על רצונכם להתמודד ולהצליח

ברמה של 4/5 יח"ל במתמטיקה.

יישר כוח, עלו והצליחו

בהוקרה – מאיר בכור

תוכן העניינים:

<u>סיכום חקירת משוואות מהמעלה הראשונה ומהמעלה השניה - שאלון 005</u>

1. **<u>חקירת משוואה מהמעלה הראשונה עם נעלם אחד</u>**

הצורה הנורמלית של המשוואה, אליה יש להגיע, היא: $ax = b$

א. כאשר $a \neq 0$ יש למשוואה <u>פתרון יחיד</u> והוא: $x = \frac{b}{a}$.
ב. כאשר $a = 0$ וגם $b \neq 0$ <u>אין פתרון</u> למשוואה.
ג. כאשר $a = 0$ וגם $b = 0$ יש למשוואה <u>אינסוף פתרונות</u>.

בנוסף לסעיפים הנ"ל יש לקחת בחשבון את תחום ההגדרה של המשוואה המקורית, במידה וקיים. לדוגמא:

$mx = \frac{3-3x}{m}$ לסעיף א': $m \neq 0$ לסעיף ב': $m = 0$.

2. **<u>חקירת מערכת משוואות מהמעלה הראשונה עם שני נעלמים</u>**

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

<u>דרך א':-</u>
בעזרת שיטת ההצבה או בעזרת שיטת השוואת מקדמים נגיע לצורה הנורמלית של משוואה מהמעלה הראשונה $ax = b$ ואותה נחקור בהתאם לסעיף 1.
במידה ותהיה דרישה, יש למצוא את x וגם את y (הפתרון).

<u>דרך ב':-</u>
היחסים בין המקדמים של שתי המשוואות:

כאשר $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ יש <u>פתרון יחיד</u> למערכת.
כאשר $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ <u>אין פתרון</u> למערכת.
כאשר $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ יש <u>אינסוף פתרונות</u> למערכת.

<u>הקשר בין הפתרון האלגברי לגרפי:</u>
כאשר יש <u>פתרון יחיד</u> של המערכת – הישרים הנ"ל <u>נחתכים בנקודה אחת</u> ולהיפך.
כאשר <u>אין פתרון</u> למערכת – הישרים הנ"ל <u>מקבילים</u> ולהיפך.
כאשר יש <u>אינסוף פתרונות</u> למערכת– הישרים הנ"ל <u>מתלכדים</u> ולהיפך.

3. <u>חקירת משוואה מהמעלה השניה (ריבועית) מהצורה: $ax^2+bx+c=0$</u> $(a\neq 0)$

א. כאשר $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases}$ וגם יש למשוואה <u>שני שורשים ממשיים</u> שונים.

ב. כאשר $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases}$ וגם יש למשוואה <u>שורש ממשי אחד</u> (שני השורשים מתלכדים).

ג. כאשר $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ וגם <u>אין</u> למשוואה שורשים ממשיים.

<u>כאשר שואלים לאילו ערכי m אין למשוואה שורשים ממשיים:-</u>

א. יש לסדר את הפרבולה כך שיהיה מקדם ל- x^2 , מקדם ל- x ואיבר חופשי.

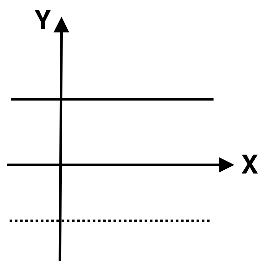
ב. לבדוק את הקו הישר $a=0$ (אחרי הצבת הפרמטר יש לקבל ביטוי <u>ללא</u> x)

ג. לבדוק את הפרבולה כשהתנאים הם: $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ וגם

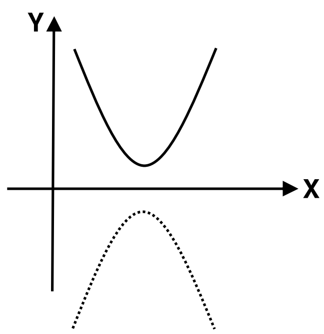
ד. פתרון סופי יהיה מערכת "או" בין הפתרונות של סעיף ב' וסעיף ג'.

<u>הסבר מבחינה גרפית:</u>

הקו הישר



הפרבולה



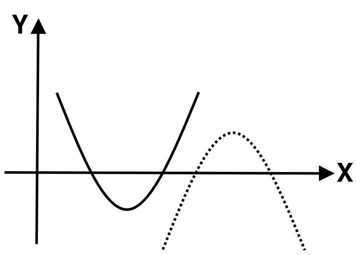
הערה: הקוים המקווקוים הם גם אופציה לפתרון

<u>כאשר שואלים לאילו ערכי m יש למשוואה שני שורשים ממשיים שונים:-</u>

א. יש לסדר את הפרבולה.

ב. <u>אין</u> בדיקת קו ישר (כי רוצים שני שורשים).

ג. לבדוק את הפרבולה כשהתנאים הם: $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases}$ וגם



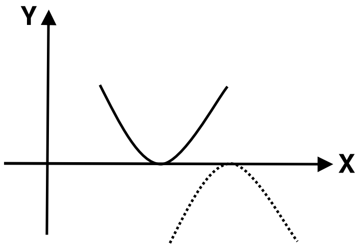
<u>כאשר שואלים לאילו ערכי m שני השורשים מתלכדים:-</u>

א. יש לסדר את הפרבולה.

ב. <u>אין</u> בדיקת קו ישר (מניסוח השאלה – רוצים משוואה ממעלה שניה בלבד).

ג. לבדוק את הפרבולה כשהתנאים הם: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ **וגם**

<u>הסבר מבחינה גרפית:</u>



<u>כאשר שואלים לאילו ערכי m יש לגרף הפונקציה ולציר ה- x נקודת אחת משותפת:-</u>

א. יש לסדר את הפרבולה.

ב. לבדוק את הקו הישר $a = 0$ (אחרי הצבת הפרמטר יש לקבל ביטוי <u>עם</u> x ואת x יש למצוא)

ג. בדיקת הפרבולה כשהתנאים הם: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ **וגם**

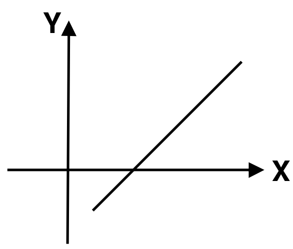
ד. פתרון סופי יהיה מערכת "או" בין הפתרונות של סעיף ב' וסעיף ג'.

הנקודה המשותפת לפרבולה ולציר ה- x תהיה בנקודה שבה: $x = -\frac{b}{2a}$.

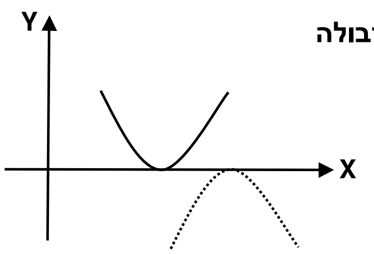
x יתקבל כפונקציה של m. נציב את m שהתקבל מסעיף ג' ונקבל את x, או שניתן להציב את m במשוואה ולפתור בהתאם. יתקבל רק פתרון אחד ל- x – כצפוי.

<u>מבחינה גרפית:</u>

הקו הישר



הפרבולה



<u>שימו לב</u>: כאשר אנו דורשים $a \neq 0$ הכוונה היא שמדובר בפרבולה והיא יכולה להיות "בוכה" ($a < 0$) או "צוחקת" ($a > 0$) העיקר לא קו ישר.

4. "שיטת התמיד"

במשוואה פרמטרית מהמעלה השניה, כאשר שואלים:

<u>עבור אילו ערכי m אי-השיוויון מתקיים לכל ערך של x (כלומר תמיד):-</u>

א. יש לסדר את הפרבולה כך שיהיה מקדם ל- x^2 , מקדם ל- x ואיבר חופשי.

ב. לבדוק את הקו הישר $a=0$ (אחרי הצבת הפרמטר יש לקבל ביטוי נכון שתמיד מתקיים <u>ללא</u> x)

ג. לבדוק את הפרבולה בהתאם לצורת אי-השוויון (ראו פירוט להלן).

ד. פתרון סופי יהיה מערכת "או" בין הפתרונות של סעיף ב' וסעיף ג'.

1) אי-השוויון מהצורה $ax^2+bx+c>0$ מתקיים עבור כל ערך של x (תמיד)

כאשר התנאים לבדיקת הפרבולה (סעיף ג') הם: $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ וגם.

2) אי-השוויון מהצורה $ax^2+bx+c<0$ מתקיים עבור כל ערך של x (תמיד)

כאשר התנאים לבדיקת הפרבולה (סעיף ג') הם: $\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ וגם.

3) אי-השוויון מהצורה $ax^2+bx+c\geq 0$ מתקיים עבור כל ערך של x (תמיד)

כאשר התנאים לבדיקת הפרבולה (סעיף ג') הם: $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$ וגם.

4) אי-השוויון מהצורה $ax^2+bx+c\leq 0$ מתקיים עבור כל ערך של x (תמיד)

כאשר התנאים לבדיקת הפרבולה (סעיף ג') הם: $\begin{cases} a<0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$ וגם.

<u>הערה:</u>
ב"שיטת התמיד" ניתן לפתור גם תרגילים בנוסח: עבור אילו ערכים של m גדולה הפונקציה $f(x)$ מהפונקציה $g(x)$ לכל ערך של x (תמיד)?

5. **"שיטת הקודקוד"**

א. קודקוד הפרבולה נמצא בנקודה $\left(-\frac{b}{2a}\ ,\ c-\frac{b^2}{4a}\right)$ או $\left(-\frac{b}{2a}\ ,\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

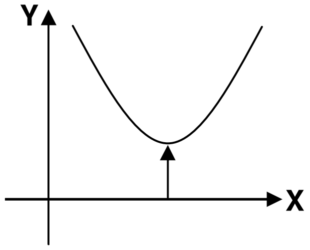
ב. בשיטה זו, סעיפים א', ב', ד', זהים ל"שיטת התמיד" למעט סעיף ג' שבו משתמשים ב- y של הקודקוד כאחד התנאים לדוגמא:

1) כאשר שואלים מתי אי-השוויון מהצורה $ax^2+bx+c>0$ מתקיים תמיד,
או כאשר שואלים מתי הפרבולה נמצאת כולה מעל לציר ה- x.

התנאים לבדיקת הפרבולה (סעיף ג') לפי "שיטת הקודקוד" הם:

$$\begin{cases} y_{\text{קודקוד}} > 0 \\ a > 0 \end{cases}$$ וגם

ומבחינה גרפית:

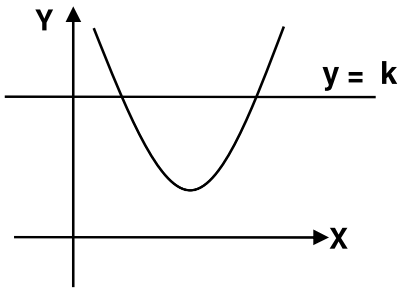


(הפרבולה "צוחקת" וה- y של הקודקוד נמצא מעל ציר ה- x).

2) כאשר שואלים:
מתי הפרבולה נמצאת כולה מעל לציר ה- x וחותכת קו מסויים y = k בשתי נקודות שונות, התנאים לבדיקת הפרבולה (סעיף ג') לפי "שיטת הקודקוד" הם:

$$\begin{cases} 0 < y_{\text{קודקוד}} < k \\ a > 0 \end{cases}$$ וגם

ומבחינה גרפית:



את השאלה הנ"ל ניתן לפתור גם בדרך אחרת - לפצל את הדרך לפתרון לשני שלבים:

א. הפרבולה נמצאת כולה מעל ציר ה- x (כלומר – תמיד) -
נפתור שלב זה ב"שיטת התמיד" והתנאים לכך הם: - $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ וגם

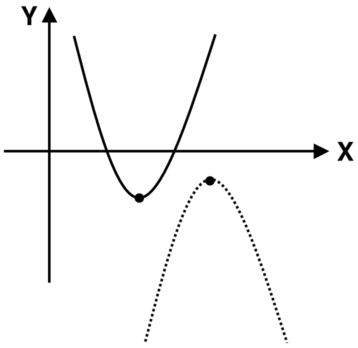
ב. הפרבולה חותכת את הקו y = k בשתי נקודות שונות (לפרבולה שני שורשים) -

נשווה בין הפרבולה לקו הישר ונקבל: $f(x)=k \ \leftarrow\ f(x)-k=0$

והתנאים לכך הם: $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta^*>0 \end{cases}$ וגם (הדיסקרימיננטה כאן שונה מזו שבסעיף א'!)

ג. הפתרון הסופי יתקבל על-ידי ביצוע "וגם" בין פתרונות הסעיפים א' ו-ב'.

3) **כאשר שואלים <u>עבור אילו ערכים של m גרף הפונקציה הוא פרבולה שקודקודה נמצא ברביע מסויים</u> –**
לדוגמא: ברביע ה- IV, התנאים לכך הם:-



$$\left\{\begin{array}{l} a \neq 0 \\ x\ \text{קודקוד} > 0 \\ y\ \text{קודקוד} < 0 \end{array}\right.$$ **וגם** **ומבחינה גרפית**

6. <u>תזכורת לגבי "בדיקת הקו הישר" – מספר דוגמאות</u>

א) כאשר שואלים: מצא לאילו ערכי m אי-השיוויונים מתקיימים לכל ערך של x.

<u>דוגמא 1</u>:- $mx^2 - mx + 8 > 0$

כאשר $a = 0$ נקבל $m = 0$

נציב $m = 0$ באי- השיוויון ונקבל:- $0x^2 - 0x + 8 > 0$ **כלומר** $8 > 0$ **תמיד.**

מסקנה: כאשר $m = 0$ לכל ערך של x אי-השיוויון תמיד חיובי וזה מתאים לתנאי השאלה ולכן $m = 0$ הוא פתרון של הקו הישר.

<u>דוגמא 2</u>:- $(m^2 - 1)x^2 - 5mx + 3 > 0$

כאשר $a = 0$ נקבל $m^2 - 1 = 0$ והפתרונות הם: $m = 1$, $m = -1$.

נציב את הפתרון הראשון $m = 1$ באי-השיוויון ונקבל: $0x^2 - 5x + 3 > 0$ **כלומר** $x < \frac{3}{5}$ **.**

מסקנה: $m = 1$ אינו מתאים לתנאי השאלה כיוון שרוצים שאי-השיוויון יתקיים תמיד, לכל ערך של x , ולא רק קטן מ- $\frac{3}{5}$.

נציב את הפתרון השני $m = -1$ באי השיוויון ונקבל: $0x^2 + 5x + 3 > 0$ **כלומר** $x > -\frac{3}{5}$**.**

מסקנה: $m = -1$ אינו מתאים לתנאי השאלה כיוון שרוצים שאי-השיוויון יתקיים תמיד, לכל ערך של x , ולא רק גדול מ- $-\frac{3}{5}$.

בדוגמא זו אין פתרון ל"בדיקת הקו הישר".

דוגמא 3:- $\left(m^2-m-2\right)x^2+\left(m-2\right)x-4<0$

כאשר $a = 0$ נקבל: $m^2-m-2=0$ והפתרונות הם: $m = 2$, $m = -1$.

נציב את הפתרון הראשון $m = 2$ באי השיוויון ונקבל: $0x^2+0x-4<0$ כלומר $-4<0$.

מסקנה: (4-) תמיד קטן מאפס ולכן $m = 2$ מתאים לתנאי השאלה והוא פתרון לקו הישר.

נציב את הפתרון השני $m = -1$ באי השיוויון ונקבל: $0x^2-3x-4<0$ כלומר $x>-\frac{4}{3}$.

מסקנה: $m = -1$ אינו מתאים לתנאי השאלה ואינו פתרון לקו הישר.

ב) כאשר שואלים לאילו ערכי m יש לגרף הפונקציה ולציר ה- x נקודה אחת משותפת:

דוגמא 1:- $y=\left(m-5\right)x^2+3m-8$

כאשר $a = 0$ נקבל: $m-5=0$ והפתרון הוא: $m = 5$.

נציב $m= 5$ בפונקציה ונקבל: $y=0x^2+15-8$ כלומר $y = 7$.

מסקנה: $m = 5$ אינו מתאים לתנאי השאלה כיוון ש- $y = 7$ הוא קו מקביל לציר ה- x ואין נקודת חיתוך עם ציר ה- x.

דוגמא 2:- $y=\left(m-1\right)x^2+2mx+7$

כאשר $a = 0$ נקבל: $m - 1 = 0$ והפתרון הוא: $m = 1$.

נציב $m = 1$ בפונקציה ונקבל: $y=0x^2+2x+7$ כלומר $y = 2x + 7$.

מסקנה: $m = 1$ מתאים לתנאי השאלה מכיוון שהישר $y = 2x + 7$ חותך את ציר ה- x בנקודה $(-3.5 , 0)$.

ג) כאשר שואלים לאילו ערכי m אין לגרף הפונקציה ולציר ה- x אף נקודה משותפת:

<u>דוגמא</u>:- $y=(m-5)x^2+3m-8$

כאשר a = 0 נקבל: $m-5=0$ והפתרון הוא: m = 5.

נציב m= 5 בפונקציה ונקבל: $y=0x^2+15-8$ כלומר y = 7.

מסקנה: m = 5 מתאים לתנאי השאלה כיוון ש- y = 7 הוא קו מקביל לציר ה- x ואין נקודת חיתוך עם ציר ה- x.

<u>שימו לב</u>!

בסעיפים ב' ו-ג' לעיל נעשה שימוש באותה דוגמא על-מנת להמחיש כמה חשוב לקרוא את נוסח השאלה ולהבין את סוג השאלה –
זה מה שיקבע לאיזו מסקנה תגיעו: אותו הפתרון אינו מתאים לסוג אחד של שאלה אך מתאים לסוג השני.

7. <u>דוגמא לשאלה ופתרונה בשתי השיטות – "שיטת התמיד" ו"שיטת הקודקוד"</u>
(כל אחד מכם יכול לבחור בשיטה הנוחה לו.)

מומלץ לשרטט לפני תחילת הפתרון על-מנת לראות את "תמונת השאלה" ואת התנאים המתאימים לה.

<u>השאלה</u>:-

מצא לאילו ערכים של m נמצא גרף הפונקציה: -

$$f(x)=(m-1)x^2+2(m+1)x+m+9$$

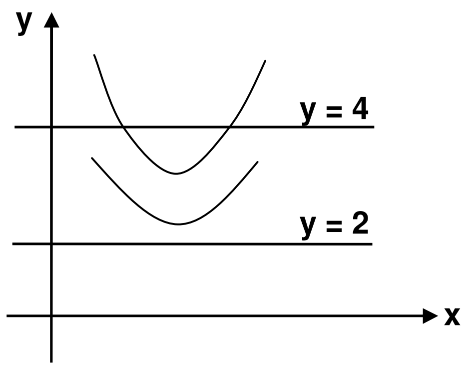
כולו מעל לקו (הישר) y = 2 וחותך את הקו (הישר) y = 4 בשתי נקודות שונות.

<u>הפתרון</u>:-

א. ברור שאין צורך בבדיקת קו ישר כי הפונקציה צריכה לחתוך את הישר y = 4 בשתי נקודות, ולכן הפונקציה היא רק פרבולה.

ב. הפרבולה חייבת להיות "צוחקת" כיוון שמתנאי השאלה היא <u>כולה מעל</u> הישר y = 2.

ג. עכשיו נשרטט את "תמונת השאלה":-



<u>דרך א' – פתרון ב"שיטת הקודקוד":</u>

ראשית נרשום את התנאים:
$$\begin{cases} a>0 \\ 2<-\dfrac{\Delta}{4a}<4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a>0 \\ 2<y_{\text{קודקוד}}<4 \end{cases}$$ **וגם**

וכעת נציב:

$$\begin{cases} m-1>0 \\ 2<\dfrac{-\left[4(m+1)^2-4(m-1)(m+9)\right]}{4(m-1)}<4 \end{cases}$$ **וגם**

$$\text{וגם}\begin{cases} m > 1 \\ 2 < \dfrac{-\left[4\left(m^2+2m+1\right)-4\left(m^2+9m-m-9\right)\right]}{4(m-1)} < 4 \end{cases}$$

נצמצם ב- 4 ונקבל: -

$$\text{וגם}\begin{cases} m > 1 \\ 2 < \dfrac{-\left[m^2+2m+1-m^2-9m+m+9\right]}{m-1} < 4 \end{cases}$$

$$\text{וגם}\begin{cases} m > 1 \\ 2 < \dfrac{-(-6m+10)}{m-1} < 4 \end{cases}$$

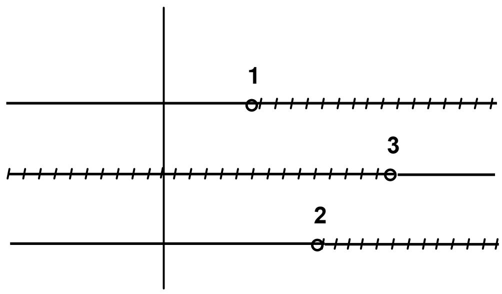
$$\text{וגם}\begin{cases} m > 1 \\ 2 < \dfrac{-(-6m+10)}{m-1} < 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} m > 1 \\ \dfrac{6m-10}{m-1} < 4 \\ \dfrac{6m-10}{m-1} > 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m > 1 \\ \dfrac{6m-10}{m-1} - 4 < 0 \\ \dfrac{6m-10}{m-1} - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{וגם}\begin{cases} m > 1 \\ \dfrac{6m-10-4(m-1)}{m-1} < 0 \\ \dfrac{6m-10-2(m-1)}{m-1} > 0 \end{cases}$$

$$\text{וגם}\begin{cases} m > 1 \\ \dfrac{2m-6}{m-1} < 0 \\ \dfrac{4m-8}{m-1} > 0 \end{cases}$$

היות והמכנה חיובי ($m - 1 > 0$) אז ניתן "לוותר" עליו ולקבל:-

$$\text{וגם}\begin{cases} m > 1 \\ 2m-6 < 0 \\ 4m-8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{וגם}\begin{cases} m > 1 \\ m < 3 \\ m > 2 \end{cases}$$



פתרון סופי לשאלה – מערכת "וגם" (האזור המשותף לכל שלישיית אי-השיוויונים):

$$\boxed{2 < m < 3}$$

<u>דרך ב' – פתרון ב"שיטת התמיד":-</u>

נפצל את הפתרון לשניים:
כאשר הפרבולה מעל הקו y = 2 <u>וגם</u> כאשר הפרבולה חותכת את הקו y = 4 בשתי נקודות שונות. (כאמור אין צורך בבדיקת הקו הישר)

א. הפרבולה מעל הישר y = 2 תמיד, כלומר:- $(m-1)x^2+2(m+1)x+m+9>2$

נסדר את אי-השיוויון ונקבל: $(m-1)x^2+2(m+1)x+m+7>0$

והתנאים לכך שאי השיוויון יהיה תמיד חיובי הם:-

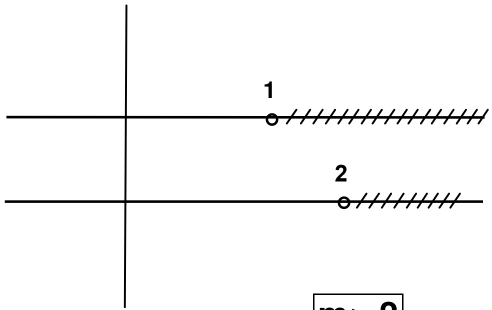
$$\text{וגם}\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m-1>0 \\ 4(m+1)^2-4(m-1)(m+7)<0 \end{cases}$$

נצמצם ב-4 ונקבל:-

$$\text{וגם}\begin{cases} m-1>0 \\ \left(m^2+2m+1\right)-\left(m^2+7m-m-7\right)<0 \end{cases}$$

$$\text{וגם}\begin{cases} m>1 \\ m^2+2m+1-m^2-7m+m+7<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m>1 \\ -4m+8<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m>1 \\ m-2>0 \end{cases}$$

$$\text{וגם}\begin{cases} m>1 \\ m>2 \end{cases}$$



$\boxed{m>2}$

ב. חיתוך הפונקציה $f(x)=(m-1)x^2+2(m+1)x+m+9$ **עם הקו y = 4 בשתי נקודות (כך מוצאים נקודות חיתוך בין שתי פונקציות – פתרון אלגברי):**

נשווה בין שתי הפונקציות $(m-1)x^2+2(m+1)x+m+9=4$ **ונקבל:**

$$(m-1)x^2+2(m+1)x+m+5=0$$

התנאים לכך שיהיו שני שורשים שונים (חיתוך בשתי נקודות) הם:-

$$\text{וגם}\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

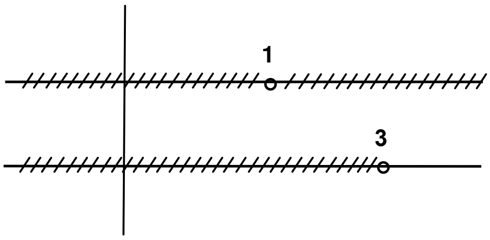
$$\text{וגם}\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ 4(m+1)^2 - 4(m-1)(m+5) > 0 \end{cases}$$

נצמצם ב- 4 ונקבל:-

$$\text{וגם}\begin{cases} m \neq 1 \\ m^2+2m+1-\left(m^2+5m-m-5 \right) > 0 \end{cases}$$

$$\text{וגם}\begin{cases} m \neq 1 \\ m^2+2m+1-m^2-5m+m+5 > 0 \end{cases} \quad \text{וגם}\begin{cases} m \neq 1 \\ -2m+6 > 0 \end{cases} \quad \text{וגם}\begin{cases} m \neq 1 \\ m-3 < 0 \end{cases}$$

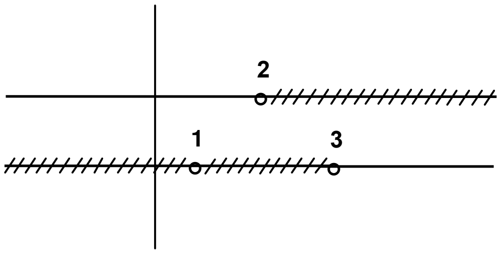
$$\text{וגם}\begin{cases} m \neq 1 \\ m < 3 \end{cases}$$



$\underline{m \neq 1}$ וגם $\underline{m < 3}$

ג. פתרון סופי של השאלה יהיה מערכת "וגם" בין סעיפים א' ו- ב':-

$$\text{וגם}\begin{cases} m > 2 \\ m \neq 1 \ \ \text{וגם} \ \ m < 3 \end{cases}$$



$\boxed{2 < m < 3}$

<u>שימו לב</u>:-
הדיסקרימיננטות בשתי השיטות <u>שונות</u> ובכל זאת קבלנו אותה התוצאה (כצפוי).

מאד חשוב לשים לב <u>לניסוח השאלה</u> – האם מדובר על פרבולה או על משוואה או על גרף הפונקציה. כאשר מדובר בפרבולה אין בדיקת קו ישר.

8. <u>מושגים נוספים בהם אתם יכולים "להיתקל":</u>

א. "<u>נקודה משותפת שאינה תלויה ב- m</u>" (דוגמא לשאלה מבחינת בגרות):

נתונות הפונקציות: $f(x)=3x^2-(3m-2)x+m$

$g(x)=1$

1) הראה כי ל- $f(x)$ ול- $g(x)$ יש נקודה משותפת שאינה תלויה ב- m .

2) מצא עבור אילו ערכים של m יש ל- $f(x)$ ול- $g(x)$ שתי נקודות משותפות.

<u>פתרון:</u>

1) נמצא את נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות:

$$3x^2-(3m-2)x+m=1$$

$$3x^2-(3m-2)x+m-1=0$$

נפתור את המשוואה הריבועית:

$$x_{1,2}=\frac{(3m-2)\pm\sqrt{9m^2-12m+4-12(m-1)}}{6}$$

$$x_{1,2}=\frac{(3m-2)\pm\sqrt{9m^2-24m+16}}{6}$$

$$x_{1,2}=\frac{(3m-2)\pm\sqrt{(3m-4)^2}}{6}$$

$$x_1=\frac{(3m-2)+(3m-4)}{6}=m-1 \quad , \quad x_2=\frac{(3m-2)-(3m-4)}{6}=\frac{1}{3}$$

ולכן הנקודה המשותפת שאינה תלויה ב- m היא: $\left(\frac{1}{3},1\right)$.

2) שתי נקודות משותפות פירושו – ששתי הנקודות לא תתלכדנה ולכן:

$$m-1\neq\frac{1}{3} \Rightarrow m\neq\frac{4}{3}$$

(ניתן לפתור גם באמצעות $\Delta>0$, במקרה שלנו $(3m-4)^2>0$).

ב. <u>"משפחת הפונקציות"</u> (גם שאלה מבחינת בגרות):

נתונה משפחת הפונקציות: $y=\left(m^2-5m\right)x^2-(m-5)x-1$.
מצא ערך של m שעבורו גרף הפונקציה הוא קו ישר המקביל לציר ה- x.

פתרון:

$$a=0 \Rightarrow m^2-5m=0 \Rightarrow m_1=0 \;,\; m_2=5$$

נציב $m_1=0$ בפונקציה ונקבל: $y=5x-1$, לא מתאים לתנאי השאלה (אינו מקביל לציר ה- x).

נציב $m_2=5$ בפונקציה ונקבל: $y=-1$, מתאים לתנאי השאלה (מקביל לציר ה- x) ולכן התשובה תהיה: $m=5$.

9. נוסחאות ווייטה

קשר בין המקדמים a , b , c של המשוואה הריבועית לשורשים x_1 , x_2 של המשוואה:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

שימושים של נוסחאות ווייטה

א. מציאת משוואה ריבועית כאשר נתונים השורשים שלה (מומלץ להניח $a = 1$ בשלב הראשון).

ב. כאשר נתונה משוואה ריבועית שהשורשים שלה הם α , β ורוצים למצוא משוואה ריבועית חדשה שהשורשים שלה כפונקציה של α ו- β.

יש לזכור את הזהות $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)$.

ג. כאשר נתונה משוואה ריבועית עם פרמטר ונתון אחד השורשים או קשר בין השורשים.

ד. כאשר יש דרישה לסימני השורשים (חיוביים, שליליים, שווי סימן, שוני סימן).

הרעיון בכתיבת התנאים – **<u>כל מה שידוע בוודאות</u> לגבי סכום השורשים ומכפלת השורשים – נכנס לתנאים!**

<u>לדוגמא</u>:-

כאשר שואלים לגבי שני שורשים חיוביים, <u>בנוסף</u> לתנאים "הרגילים" $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ **וגם**

יש להוסיף בנוסחאות ווייטה את $-\frac{b}{a} > 0$ (ידוע שסכום שני מספרים חיוביים גם הוא חיובי)

ואת התנאי $\frac{c}{a} > 0$ (ידוע שמכפלת שני מספרים חיוביים גם היא חיובית).

יוצא שיש לבצע מערכת "וגם" של ארבעה אי-שיוויונים:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$ **וגם**

ה. כאשר יש דרישה לשימוש עם ערך מוחלט – לדוגמא:
התנאים ששני השורשים יהיו שוני סימן והשורש בעל הערך המוחלט הגדול יותר יהיה השורש החיובי.

$$\text{וגם}\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases}$$

ו. בשאלונים מתקדמים יותר (007) -
למשל, בהנדסה אנליטית כאשר נתונה נקודת האמצע של קטע ניתן להשתמש
בנוסחאות וייטה בדרך הבאה: $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ (ולמצוא את שיפוע הקטע / הישר)

ניסוח אחר לגבי סימני השורשים:-

מצא לאילו ערכי m חותכת הפונקציה את ציר ה- x בשתי נקודות הנמצאות:

א. משני צידי הראשית $\leftrightarrow$ שני שורשים ממשיים שונים בעלי סימנים מנוגדים.
ב. באותו צד של הראשית $\leftrightarrow$ שני שורשים ממשיים שונים בעלי סימנים שווים.
ג. מימין לראשית $\leftrightarrow$ שני שורשים ממשיים שונים חיוביים.
ד. משמאל לראשית $\leftrightarrow$ שני שורשים ממשיים שונים שליליים.

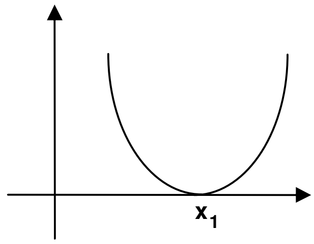
סיכום התנאים ששני שורשי המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ הם:-

שוני סימן	שווי סימן	שניהם חיוביים	שניהם שליליים
$a \neq 0$ $\Delta > 0$ $\frac{c}{a} < 0$ במקרה זה ניתן לוותר על התנאי של $\Delta > 0$	$a \neq 0$ $\Delta > 0$ $\frac{c}{a} > 0$	$a \neq 0$ $\Delta > 0$ $\frac{c}{a} > 0$ $-\frac{b}{a} > 0$	$a \neq 0$ $\Delta > 0$ $\frac{c}{a} > 0$ $-\frac{b}{a} < 0$

<u>דוגמא לשימוש בנוסחאות ווייטה</u>

נתונה משוואה ריבועית עם פרמטר ויש צורך למצוא עבור אילו ערכים של m יש למשוואה <u>לפחות</u> שורש ממשי <u>אחד חיובי</u>. פתרון גרפי והתנאים המתאימים לו:

א. שורש אחד חיובי - פרבולה

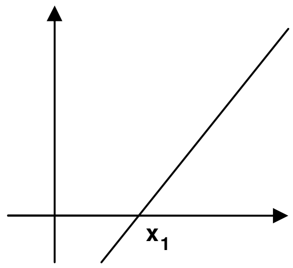


וגם $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

x_1 חייב להיות בצד ימין של הראשית על -מנת שיהיה חיובי

$$x_1 = -\frac{b}{2a}$$

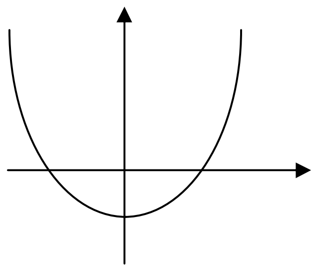
ב. שורש אחד חיובי – הקו הישר



$$a = 0$$

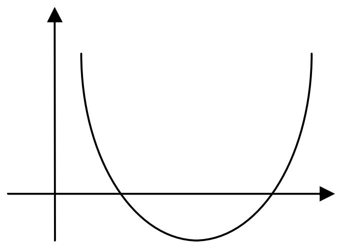
x_1 חייב להיות בצד ימין של הראשית על-מנת שיהיה חיובי

ג. שורש אחד חיובי – פרבולה (השני שלילי)



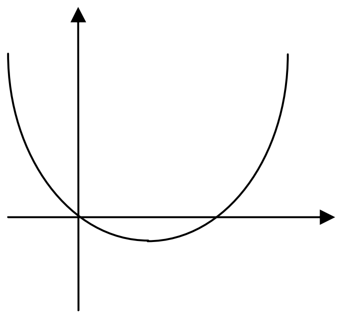
וגם $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases}$

ד. שני שורשים חיוביים – פרבולה



וגם $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$

ה. שורש אחד חיובי – פרבולה (השורש השני שווה אפס)



וגם $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} = 0 \end{cases}$

הפתרון הסופי יהיה מערכת "או" בין הפתרונות של חמשת האפשרויות שלעיל.

סיכום סדרות – שאלון 005

<u>סוגי הסדרות בסיכום זה:</u>
סדרה חשבונית, סדרה הנדסית, סדרות מעורבות, סדרה הנדסית אינסופית יורדת, סדרת נסיגה.

בדרך-כלל, האיברים של כל סדרה יסומנו כך: - $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ a_4\ , \ldots\ldots ,\ a_{n-2}\ ,\ a_{n-1}\ ,\ a_n$

סדרה חשבונית

<u>הגדרה: -</u>
סדרת מספרים נקראת "סדרה חשבונית" (אריתמטית) אם <u>ההפרש</u> בין כל איבר לאיבר הקודם לו הוא <u>מספר קבוע</u>.

d - הפרש הסדרה החשבונית

לפיכך - $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots\ldots = a_n - a_{n-1}$

כאשר $d > 0$ הסדרה החשבונית עולה, כאשר $d < 0$ הסדרה החשבונית יורדת.

בצורה כללית: כאשר $a_{n+1} > a_n$ לכל n - הסדרה עולה.

כאשר $a_{n+1} < a_n$ לכל n - הסדרה יורדת.

כל איבר בסדרה חשבונית הוא הממוצע החשבוני של שני האיברים הסמוכים לו.
אם a, b, c הם שלושה מספרים עוקבים בסדרה חשבונית אז מתקיים: $b = \frac{a+c}{2}$.

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית: $a_n = a_1 + (n-1)d$ **(הנוסחא מופיעה בדף הנוסחאות).**

האיבר הכללי "מייצג" את כל איברי הסדרה החל מהראשון ועד האחרון.
הנוסחא היא פונקציה של n - מיקום האיבר בסדרה.

על-מנת <u>להוכיח שהסדרה היא סדרה חשבונית</u> יש להוכיח, בהתאם להגדרה, כי ההפרש בין כל איבר לאיבר הקודם לו הוא מספר קבוע.
כאשר <u>נתון</u> a_n יש:-
א. למצוא את a_{n-1} (בכל מקום שרשום n יש לרשום כעת $n-1$).
ב. למצוא את ההפרש $a_n - a_{n-1}$ ולקבל תוצאה שהיא קבועה ולא תלויה ב- n.
ג. לסכם את התשובה (חובה!):
"קבלנו הפרש קבוע בין שני איברים עוקבים ולכן הסדרה היא סדרה חשבונית".

<u>סכום של n האיברים הראשונים בסדרה חשבונית</u>: - $S_n = \left[2a_1 + (n-1)d\right]\frac{n}{2}$

(נוסחא זו מופיעה בדף הנוסחאות).

קיימות עוד שתי נוסחאות שאינן מופיעות בדף הנוסחאות: - (מומלץ להכירן)

$$S_n = \left[2a_n - (n-1)d\right]\frac{n}{2} \quad , \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

יוצא איפה, שבסדרה חשבונית קיימות שתי משוואות עם 5 פרמטרים / נעלמים:

a_1 , n , a_n , d , S_n

ולפיכך, חלקם חייב להופיע בנתוני השאלה.

בהרבה מהשאלות מומלץ ל"תרגם" את האיברים הנתונים בשאלה ל- a_1 ו- d. לדוגמא: -

אם נתון $a_{13} = 8$ אז: $a_{13} = a_1 + (13-1)d = 8$ ולכן: $a_1 + 12d = 8$.

<u>שימו לב!</u>

אם נתון הסכום של שלושה מספרים עוקבים בסדרה חשבונית, ניתן למצוא מיידית את האיבר האמצעי כאשר נסמן האיברים בצורה הבאה: $x-d , x , x+d$. הסכום הנתון יהיה $3x$.

<u>כאשר נתון S_n ורוצים למצוא את a_n - האיבר הכללי:</u>

א. יש למצוא את S_{n-1} (בכל מקום שרשום n יש לרשום כעת n-1).

ב. למצוא את ההפרש בין $S_n - S_{n-1}$ - הפרש זה יהיה a_n. $\boxed{\text{כלומר: } a_n = S_n - S_{n-1}}$

ובדוגמא מספרית: $a_{10} = S_{10} - S_9$.

ג. לוודא ש: $S_1 = a_1$, כלומר להציב פעם n=1 ב- S_n הנתון ופעם להציב n=1 ב- a_n (שהתקבל בסעיף ב') ולוודא שמתקבל מספר שווה.

ד. במידה וכעת רוצים להוכיח כי הסדרה היא סדרה חשבונית, יש להוכיח כי: קבוע = $a_n - a_{n-1}$.

<u>סכום איברים אחרונים</u>

לא קיימת נוסחא לסכום האיברים האחרונים של סדרה ולפיכך, קיימות שתי שיטות למציאת סכום האיברים האחרונים:-

א. <u>הסכום הכללי של הסדרה פחות סכום האיברים הראשונים שלה</u>.

דוגמא 1: בסדרה 20 איברים ורוצים למצוא את סכום 8 האיברים האחרונים של הסדרה.

סכום 12 האיברים הראשונים הוא S_{12} $(20 - 8 = 12)$.

סכום כל 20 האיברים בסדרה (הסכום הכללי) הוא S_{20} ולכן סכום 8 האיברים האחרונים יהיה: $S = S_{20} - S_{12}$. (סכום 8 האיברים האחרונים)

דוגמא 2: בסדרה n איברים ויש למצוא את $n - 5$ האיברים האחרונים ולכן הנוסחא תהיה:

$S = S_n - S_5$ (סכום $n - 5$ האיברים האחרונים)

מ"בחינה גרפית":

$$\overbrace{\underbrace{a_1 \ldots\ldots a_5}_{S_5},\ a_6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_n}^{S_n}$$

<u>שימו לב!</u>

1) הסימון S_8 הוא סימון של סכום 8 האיברים <u>הראשונים</u> (ה-8 הוא דוגמא..), ולפיכך <u>אין</u> לרשום את סכום האיברים <u>האחרונים</u> בצורה זו , אלא לסמן S בלבד ולכתוב במילים לידו: "סכום 8 האיברים האחרונים".

2) יוצא שתמיד ניתן לבדוק אם הגעתם לנוסחא הנכונה של האיברים האחרונים בעזרת חיסור האינדקסים:

בדוגמא 1: $20-12 = 8$ נותן את 8 האיברים האחרונים שנתבקשתם למצוא.

בדוגמא 2: $n - 5$ הם סה"כ האיברים האחרונים שנתבקשתם למצוא.

ב. <u>להפוך את האיבר הראשון של האיברים האחרונים ל-</u> a_1.

בדוגמא - לחשב את a_{13} ו"להפוך" אותו לאיבר הראשון כלומר התוצאה תהיה a_1.

כעת ניתן להשתמש בנוסחת סכום האיברים הראשונים $S_8 = \left[2a_1 + (8-1)d\right]\frac{8}{2}$.

<u>שימו לב!</u>

על-מנת לאתר מהו האיבר הראשון של האיברים האחרונים יש לכם שתי אפשרויות:

1) "תרגיל עזר" שמסתמך על נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית -
נסמן את האיבר הראשון של האיברים האחרונים כ- a_x
d של האינדקסים הוא 1 ; y הוא מספר האיברים האחרונים הדרוש
ולכן: $n = x + (y-1)\cdot 1$
ולדוגמא שלעיל: $20 = x + (8-1)\cdot 1$ ולכן $x = 13$ (כלומר האיבר הראשון של האיברים האחרונים הוא a_{13}).

2) לרשום את הפרשי הסכומים כמו בשיטה א' ו<u>האינדקס</u> של האיבר הראשון של האיברים האחרונים יהיה האינדקס של סכום האיברים הראשונים + 1.
ובדוגמאות שלעיל:

בדוגמא א': $S = S_{20} - S_{12}$.
האינדקס של סכום האיברים הראשונים הוא 12 ולכן a_{13} הוא האיבר הראשון של האיברים האחרונים.

בדוגמא ב': $S = S_n - S_5$
האינדקס של סכום האיברים הראשונים הוא 5 ולכן a_6 הוא האיבר הראשון של האיברים האחרונים.

<u>מציאת מספר האיברים בסדרה חשבונית</u>

כאשר מבקשים למצוא את n עליכם לזכור כי על n להיות חיובי ושלם (כי הוא מציין גם מיקום).
כאשר מקבלים שני פתרונות חיובים ושלמים עבור n (כפתרון של משוואה ריבועית) ייתכן ששני הפתרונות מתאימים, אך ייתכן שיש לפסול אחד מהם.
הדרך להחליט היא לבדוק את a_1 ואת a_n ולראות אם הם מתאימים לתנאי השאלה (והגיוניים).

<u>סכום המקומות האי-זוגיים והזוגיים</u>

בצורה כללית יש לחלק את הבעיה לשלוש: -
הסדרה המקורית, סדרת המקומות האי-זוגיים וסדרת המקומות הזוגיים.

א. <u>כאשר בסדרה החשבונית – המקורית יש מספר זוגי של איברים (2n איברים)</u>

1. בסדרת המקומות <u>האי-זוגיים</u> הסכום יהיה: $S_n = \left[2a_1 + (n-1)2d\right]\frac{n}{2}$

<u>שימו לב!</u>
הפרש הסדרה המקורית הוכפל (2d במקום d) ומספר האיברים הפך ל- n במקום 2n.

2. בסדרת המקומות <u>הזוגיים</u> הסכום יהיה: $S_n = \left[2a_2 + (n-1)2d\right]\frac{n}{2}$

<u>שימו לב!</u>
*** בנוסחה משתמשים ב- a_2 במקום ב- a_1 : $a_2 = a_1 + d$, האיבר השני בסדרה המקורית הוא האיבר הראשון בסדרה הזוגית.**
הפרש הסדרה המקורית הוכפל (2d במקום d) ומספר האיברים הפך ל- n במקום 2n.
*** לא לשכוח להכפיל ב- 2 את n על-מנת למצוא את <u>מספר האיברים הנכון</u> (2n).**

3. כאשר בסדרה יש 2n איברים <u>ההפרש</u> בין סכום האיברים במקומות הזוגיים לבין סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא:-

$$= S_n(\text{מקומות אי-זוגיים}) - S_n(\text{מקומות זוגיים})$$

$$= \left[2(a_1+d)+(n-1)2d\right]\frac{n}{2} - \left[2a_1+(n-1)2d\right]\frac{n}{2} =$$

$$= \left[2a_1+2d+2nd-2d\right]\frac{n}{2} - \left[2a_1+2nd-2d\right]\frac{n}{2} = \frac{n}{2}\left[2a_1+2nd-2a_1-2nd+2d\right] = \underline{\underline{nd}}$$

ב. <u>כאשר בסדרה החשבונית – המקורית יש מספר אי-זוגי של איברים (2n +1 איברים)</u>

1. בסדרת המקומות <u>האי-זוגיים</u> הסכום יהיה: $S_{n+1} = \left[2a_1 + (n+1-1)2d\right]\frac{n+1}{2}$

<u>שימו לב!</u>
הפרש הסדרה המקורית הוכפל (2d במקום d) ומספר האיברים הפך ל- n+1 במקום 2n+1.

2. בסדרת המקומות <u>הזוגיים</u> הסכום יהיה: $S_n = \left[2a_2 + (n-1)2d\right]\frac{n}{2}$

<u>שימו לב!</u>
בנוסחה משתמשים ב- a_2 במקום ב- a_1 : $a_2 = a_1 + d$, האיבר השני בסדרה המקורית הוא האיבר הראשון בסדרה הזוגית.
הפרש הסדרה המקורית הוכפל (2d במקום d) ומספר האיברים הפך ל- n במקום 2n.

<u>סדרה הנדסית</u>

<u>הגדרה:-</u>
סדרת מספרים נקראת "סדרה הנדסית" אם <u>היחס</u> <u>(המנה)</u> בין כל איבר לאיבר הקודם לו הוא <u>מספר קבוע.</u>

q - מנת הסדרה (היחס הקבוע). לפיכך - $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

<u>בסדרה הנדסית לא ייתכן שאחד האיברים יהיה אפס!</u>

<u>עליה וירידה של סדרה הנדסית</u>
עליה וירידה של סדרה הנדסית היא בהתאם ל- a_1 ו- q:
כאשר כל המספרים עולים – הסדרה עולה;
כאשר כל המספרים יורדים – הסדרה יורדת;
כאשר המספרים עולים ויורדים – הסדרה לא עולה ולא יורדת;

בצורה כללית: כאשר $a_{n+1} > a_n$ לכל n - הסדרה עולה.

כאשר $a_{n+1} < a_n$ לכל n - הסדרה יורדת.

כל איבר בסדרה הנדסית הוא הממוצע ההנדסי של שני האיברים הסמוכים לו –
אם a , b , c הם שלושה מספרים עוקבים בסדרה הנדסית אז מתקיים: $b^2 = ac$

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית (מופיעה בדף הנוסחאות): $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

האיבר הכללי מייצג את כל איברי הסדרה, החל מהראשון ועד האחרון.
הנוסחא היא פונקציה של n - מיקום האיבר בסדרה.

על-מנת להוכיח שסדרה היא סדרה הנדסית יש להוכיח, בהתאם להגדרה, כי <u>היחס</u> בין כל איבר לאיבר הקודם לו הוא מספר <u>קבוע</u> .

כאשר <u>נתון</u> a_n ויש להוכיח שהסדרה היא הנדסית צריך:

א. למצוא את a_{n-1} (בכל מקום שרשום n יש לרשום כעת $n-1$).
ב. למצוא את היחס $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ ולקבל תוצאה שהיא קבועה ואינה תלויה ב- n.
ג. לסכם את התשובה (חובה!):
"קבלנו מנה קבועה בין שני איברים עוקבים ולכן הסדרה היא סדרה הנדסית".

<u>סכום של n האיברים הראשונים בסדרה הנדסית:</u>

$$(q \neq 1) \qquad S_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1} \qquad \text{(נוסחא זו מופיעה בדף הנוסחאות)}$$

<u>כאשר $q=1$ אסור להשתמש בנוסחא הנ"ל</u> ולכן הסכום יהיה: $S_n = a_1 \cdot n$

קיימת עוד נוסחא לחישוב סכום n האיברים הראשונים ,שאינה מופיעה בדף הנוסחאות, אך מומלץ להכירה:

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1} \qquad (q \neq 1)$$

יוצא איפה, שבסדרה הנדסית קיימות שתי משוואות עם 5 פרמטרים / נעלמים: a_1 , n , a_n , q , S_n
ולפיכך, חלקם חייב להופיע בנתוני השאלה. בהרבה מהשאלות מומלץ ל"תרגם" את האיברים הנתונים ל- a_1 ו- q.

לדוגמא: - אם נתון $a_{13} = 8$, אז: $a_{13} = 8 = a_1 \cdot q^{13-1} = a_1 \cdot q^{12}$.

כמו כן, בהרבה מקרים בהם מדובר בסדרה הנדסית ניתן לחלק משוואה במשוואה על-מנת לפתור את מערכת המשוואות (<u>נא לשים לב שאינכם מחלקים באפס</u>!)

<u>שימו לב!</u>
אם נתונה המכפלה של שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית, ניתן למצוא מיידית את האיבר האמצעי כאשר נסמן את האיברים בצורה הבאה: $xq \ , \ x \ , \ \frac{x}{q}$. המכפלה הנתונה תהיה x^3 .

<u>כאשר נתון S_n ורוצים למצוא את a_n - האיבר הכללי:</u>

א. יש למצוא את S_{n-1} (בכל מקום שרשום n יש לרשום כעת $n-1$).

ב. למצוא את ההפרש בין $S_n - S_{n-1}$ - הפרש זה יהיה a_n . $\boxed{\text{כלומר: } a_n = S_n - S_{n-1}}$

ובדוגמא מספרית: $a_{10} = S_{10} - S_9$.

ג. לוודא ש: $S_1 = a_1$, כלומר להציב פעם $n=1$ ב- S_n הנתון ופעם להציב $n=1$ ב- a_n (שהתקבל בסעיף ב') ולוודא שמתקבל מספר שווה.

ד. במידה וכעת רוצים להוכיח כי הסדרה היא סדרה הנדסית, יש להוכיח כי: קבוע = $\frac{a_n}{a_{n-1}}$

<u>סכום איברים אחרונים בסדרה הנדסית</u>
לא קיימת נוסחא לסכום האיברים האחרונים של סדרה ולפיכך, קיימות שתי שיטות למציאת סכום האיברים האחרונים:-

א. <u>הסכום הכללי של הסדרה פחות סכום האיברים הראשונים שלה.</u>

דוגמא 1: בסדרה 20 איברים ורוצים למצוא את סכום 8 האיברים האחרונים של הסדרה.
סכום 12 האיברים הראשונים הוא S_{12} (12 = 8 – 20).
סכום כל 20 האיברים בסדרה (הסכום הכללי) הוא S_{20} ולכן סכום 8 האיברים האחרונים יהיה: $S = S_{20} - S_{12}$. (סכום 8 האיברים האחרונים)

דוגמא 2: בסדרה n איברים ויש למצוא את n – 5 האיברים האחרונים ולכן הנוסחא תהיה:
$S = S_n - S_5$ (סכום n – 5 האיברים האחרונים)

מ"בחינה גרפית":

$$\overbrace{\underbrace{a_1 \ldots\ldots a_5}_{S_5},\ a_6 \ldots\ldots\ldots\ldots a_n}^{S_n}$$

<u>שימו לב!</u>
1) הסימון S_8 הוא סימון של סכום 8 האיברים <u>הראשונים</u> (ה-8 הוא דוגמא..), ולפיכך <u>אין</u> לרשום את סכום האיברים <u>האחרונים</u> בצורה זו , אלא לסמן S בלבד ולכתוב במילים לידו: "סכום 8 האיברים האחרונים".
2) יוצא שתמיד ניתן לבדוק אם הגעתם לנוסחא הנכונה של האיברים האחרונים בעזרת חיסור האינדקסים:
בדוגמא 1: 8 = 20-12 נותן את 8 האיברים האחרונים שנתבקשתם למצוא.
בדוגמא 2: n – 5 הם סה"כ האיברים האחרונים שנתבקשתם למצוא.

ב. להפוך <u>את האיבר הראשון של האיברים האחרונים ל-</u> a_1.

בדוגמא - לחשב את a_{13} ו"להפוך" אותו לאיבר הראשון כלומר התוצאה תהיה a_1.

כעת ניתן להשתמש בנוסחת סכום האיברים הראשונים: $S_8 = \dfrac{a_1\left(q^8-1\right)}{q-1}$.

<u>שימו לב!</u>
על-מנת לאתר מהו האיבר הראשון של האיברים האחרונים יש לכם שתי אפשרויות:

1) "תרגיל עזר" שמסתמך על נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית -
נסמן את האיבר הראשון של האיברים האחרונים כ- a_x
d של האינדקסים הוא 1 ; y הוא מספר האיברים האחרונים הדרוש
ולכן: $n = x + (y-1)\cdot 1$
ולדוגמא שלעיל: $20 = x + (8-1)\cdot 1$ ולכן $x = 13$ (כלומר האיבר הראשון של האיברים האחרונים הוא a_{13}).

2) לרשום את הפרשי הסכומים כמו בשיטה א' ו<u>האינדקס</u> של האיבר הראשון של האיברים האחרונים יהיה האינדקס של סכום האיברים הראשונים + 1.
ובדוגמאות שלעיל:

בדוגמא א': $S = S_{20} - S_{12}$.
האינדקס של סכום האיברים הראשונים הוא 12 ולכן a_{13} הוא האיבר הראשון של האיברים האחרונים.

בדוגמא ב': $S = S_n - S_5$
האינדקס של סכום האיברים הראשונים הוא 5 ולכן a_6 הוא האיבר הראשון של האיברים האחרונים.

<u>מציאת מספר האיברים בסדרה הנדסית</u>

כאשר מבקשים למצוא את n עליכם לזכור כי על n להיות חיובי ושלם (כי הוא מציין גם מיקום).
כאשר מקבלים שני פתרונות חיובים ושלמים עבור n (כפתרון של משוואה ריבועית) ייתכן ששני הפתרונות מתאימים, אך ייתכן שיש לפסול אחד מהם.
הדרך להחליט היא לבדוק את a_1 ואת a_n ולראות אם הם מתאימים לתנאי השאלה (והגיוניים).

<u>סכום המקומות האי-זוגיים והזוגיים בסדרה הנדסית</u>

בצורה כללית יש לחלק את הבעיה לשלושה חלקים: -
הסדרה המקורית, סדרת המקומות האי-זוגיים וסדרת המקומות הזוגיים.

א. <u>כאשר בסדרה ההנדסית – המקורית יש מספר זוגי של איברים (2n איברים)</u>

1. בסדרת המקומות <u>האי-זוגיים</u> הסכום יהיה:
$$S_n = \frac{a_1\left(\left(q^2\right)^n - 1\right)}{q^2 - 1}$$

<u>שימו לב!</u>
מנת הסדרה המקורית היא כעת q^2 (במקום q) ומספר האיברים הפך ל- n במקום $2n$.

2. בסדרת המקומות <u>הזוגיים</u> הסכום יהיה:
$$S_n = \frac{a_2\left(\left(q^2\right)^n - 1\right)}{q^2 - 1}$$

<u>שימו לב!</u>
*** בנוסחה משתמשים ב- a_2 במקום ב- a_1 : $a_2 = a_1q$, האיבר השני בסדרה המקורית הוא האיבר הראשון בסדרה הזוגית.**
מנת הסדרה המקורית היא כעת q^2 (במקום q) ומספר האיברים הפך ל- n במקום $2n$.
*** לא לשכוח להכפיל ב- 2 את n על-מנת למצוא את <u>מספר האיברים הנכון</u> ($2n$).**

ב. <u>כאשר בסדרה ההנדסית – המקורית יש מספר אי-זוגי של איברים (2n +1 איברים)</u>

1. בסדרת המקומות <u>האי-זוגיים</u> הסכום יהיה:

$$S_{n+1}=\frac{a_1\left(\left(q^2\right)^{n+1}-1\right)}{q^2-1}$$

<u>שים לב!</u>

מנת הסדרה המקורית היא כעת q^2 (במקום q) ומספר האיברים הפך ל- n+1 במקום 2n+1.

2. בסדרת המקומות <u>הזוגיים</u> הסכום יהיה:

$$S_n=\frac{a_2\left(\left(q^2\right)^{n}-1\right)}{q^2-1}$$

<u>שים לב!</u>

בנוסחה משתמשים ב- a_2 במקום ב- a_1 : $a_2=a_1q$, האיבר השני בסדרה המקורית הוא האיבר הראשון בסדרה הזוגית.

מנת הסדרה המקורית היא כעת q^2 (במקום q) ומספר האיברים הפך ל- n במקום 2n.

<u>סכום של סדרה הנדסית שהחליפו לה את סימני האיברים במקומות הזוגיים / האי-זוגיים</u>

א. נתונה סדרה הנדסית בעלת מספר זוגי של איברים (2n) והחליפו בה את הסימנים של האיברים שבמקומות <u>האי-זוגיים</u>.

הסדרה המקורית:- $a_1 , a_2 , a_3 ,......., a_{2n}$

הסדרה "מוחלפת הסימנים" תהיה: - $-a_1 , a_2 , -a_3 , a_4 ,......., a_{2n}$

$$S_{2n}=\frac{(-a_1)\left((-q)^{2n}-1\right)}{(-q)-1}$$

<u>שימו לב!</u>

מנת הסדרה "מוחלפת הסימנים" תהיה $-q$ ובנוסף: $(-q)^{2n}=q^{2n}$.

ב. נתונה סדרה הנדסית בעלת מספר זוגי של איברים $(2n)$ והחליפו בה את הסימנים של האיברים שבמקומות **הזוגיים**.

הסדרה המקורית:- $a_1 , a_2 , a_3 ,\dots\dots, a_{2n}$

הסדרה "מוחלפת הסימנים" תהיה: - $a_1 , -a_2 , a_3 , -a_4 ,\dots\dots, -a_{2n}$

ולכן סכום $2n$ האיברים יהיה: $S_{2n} = \dfrac{(a_1)\left((-q)^{2n} - 1\right)}{(-q) - 1}$

מנת הסדרה "מוחלפת הסימנים" תהיה $-q$ ובנוסף: $(-q)^{2n} = q^{2n}$.

<u>סדרות מעורבות</u>

<u>הגדרה:-</u>
סדרות שאיבריהן יוצרים בחלקם סדרה הנדסית ובחלקם סדרה חשבונית נקראות סדרות מעורבות.
בשאלות המדברות על סדרות מעורבות נשתמש בעיקר בכללים המגדירים סדרה חשבונית וסדרה הנדסית:

א. כל איבר בסדרה חשבונית הוא הממוצע החשבוני של שני האיברים הסמוכים לו - $b = \dfrac{a + c}{2}$
יש לזכור כי בסדרה חשבונית מתקיים: $x ,\ x + d ,\ x + 2d$

ב. כל איבר בסדרה הנדסית הוא הממוצע ההנדסי של שני האיברים הסמוכים לו - $b^2 = ac$
יש לזכור כי בסדרה הנדסית מתקיים: $x ,\ x \cdot q ,\ x \cdot q^2$

בתרגילים מסויימים, חשוב לדעת לבחור באיזו סדרה יוגדרו הנעלמים, על-מנת להקל על הפתרון.

<u>סדרה הנדסית אינסופית יורדת</u>

<u>הגדרה:-</u>

סדרה הנדסית המקיימת את שני התנאים הבאים:

1. **בסדרה ההנדסית יש אינסוף איברים.**
2. **מנת הסדרה ההנדסית q חייבת להיות בתחום $-1 < q < 1$**

כאשר מתקיימים שני התנאים הנ"ל, נוסחת סכום אינסוף האיברים היא: $S = \frac{a_1}{1-q}$

<u>סכום סדרה הנדסית אינסופית יורדת שהחליפו לה את סימני האיברים במקומות הזוגיים/האי-זוגיים</u>

א. נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת והחליפו בה את הסימנים של האיברים שבמקומות <u>האי-זוגיים</u>.

הסדרה המקורית:- $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 ,.........$

הסדרה "מוחלפת הסימנים" תהיה: - $-a_1 , a_2 , -a_3 , a_4 , -a_5 ,..........$

כעת מנת הסדרה "מוחלפת הסימנים" היא $-q$ והאיבר הראשון הוא $-a_1$ ולכן סכום הסדרה

"מוחלפת הסימנים" יהיה: $S = \frac{-a_1}{1-(-q)} = \frac{-a_1}{1+q}$

<u>שימו לב!</u>
גם הסדרה "מוחלפת הסימנים" הינה סדרה הנדסית אינסופית יורדת.

ב. נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת והחליפו בה את הסימנים של האיברים שבמקומות <u>הזוגיים</u>.

הסדרה המקורית:- $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 ,.........$

הסדרה "מוחלפת הסימנים" תהיה: - $a_1 , -a_2 , a_3 , -a_4 , a_5 ,..........$

כעת מנת הסדרה "מוחלפת הסימנים" היא $-q$ והאיבר הראשון נשאר a_1 ולכן סכום
הסדרה "מוחלפת הסימנים" יהיה: $S = \frac{a_1}{1-(-q)} = \frac{a_1}{1+q}$

ג. אם נעלה בריבוע את כל איברי הסדרה המקורית נקבל : $a_1^2 , a_2^2 , a_3^2 , a_4^2 , a_5^2 ,.........$

מנת הסדרה החדשה היא q^2 והאיבר הראשון הוא a_1^2 .

שימו לב! q^2 נמצא ב"תחום המותר": $0 < q^2 < 1$ ולכן סכום הסדרה החדשה יהיה:

$$S = \frac{a_1^2}{1-q^2}$$

כלומר, כל שימוש בנוסחא הכללית לסכום סדרה הנדסית אינסופית יורדת: $S = \frac{a_1}{1-q}$

מחייב אתכם לבדוק האם עדיין מתקיימים שני התנאים:

1. לסדרה אינסוף איברים.

2. $-1 < q < 1$ (q נמצא עדיין ב"תחום המותר").

נוסחת נסיגה – סדרת נסיגה

הגדרה:-

נוסחא המראה כיצד מתקבל כל איבר באמצעות האיבר הקודם לו.
בדרך-כלל, בנוסחת נסיגה נתון האיבר הראשון a_1 ונוסחא המראה כיצד מתקבל כל איבר מהאיבר הקודם לו. לדוגמא: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 5n + 3$

הערות:
* **ניתן גם "ללכת אחורה", כלומר למצוא איברים קודמים.**
* **יש לשים לב שאם טועים באחד האיברים – כל שאר האיברים שנמצא יהיו שגויים גם הם.**

המעבר מהאיבר הכללי לכלל הנסיגה

כאשר נתון a_n - האיבר הכללי, ורוצים את נוסחת הנסיגה, יש:-

א. למצוא את a_{n+1} (בכל מקום שרשום n יש לרשום כעת n+1)
ב. למצוא את ההפרש $a_{n+1} - a_n$. להפרש זה נקרא $f(n)$: $a_{n+1} - a_n = f(n)$
ג. להעביר את a_n לאגף ימין של המשוואה ולקבל: $a_{n+1} = a_n + f(n)$.
ד. למצוא a_1 על-פי האיבר הכללי הנתון. (במקום n יש להציב 1) ולהשלים את הצורה הכללית של נוסחת הנסיגה: $a_1 = ...$ $a_{n+1} = a_n + f(n)$.

היות ולסדרה ייתכנו מספר כללי נסיגה, ניתן במקום החיסור בסעיף ב', לבצע למשל חילוק:

נתון: - a_n.
מצא: a_{n+1}
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$$
$$a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$$
מצא את a_1 (מ- a_n הנתון)

מאד מומלץ להשתמש בשיטת החילוק כאשר ב- a_n יש חזקות: יש להקפיד שכל האיברים יהיו <u>שונים מאפס!</u>

הערה:
אם שואלים שאלה הקשורה למציאת שני איברים עוקבים בסדרת נסיגה ונתון ההפרש ביניהם, ניתן להשתמש בכלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + f(n)$ ולומר כי: ההפרש הנתון הוא $f(n)$.

<u>המעבר מכלל הנסיגה לאיבר הכללי</u>

השיטה: יש למצוא מספר איברים על-פי כלל הנסיגה ובהתאם לתוצאות יש למצוא את האיבר הכללי של הסדרה (למצוא את החוקיות).

היות שלא ברור מאליו שהחוקיות שמצאנו נכונה "עד אינסוף", יש להוכיח את האיבר הכללי באמצעות אינדוקציה (שאלון 006 – אינדוקציה התלכדות סדרות).

<u>קיימות שאלות בסדרת נסיגה בנוסח הבא:</u>

לדוגמא:-

נתונה סדרת נסיגה $a_1 = 15$, $a_{n+1} = 2a_n - 4n + 1$.

א. הוכח כי הסדרה b_n המוגדרת על-ידי: $b_n = a_n - 4n - 3$ היא סדרה הנדסית.

תשובה: על-מנת להוכיח שסדרה היא סדרה הנדסית, יש להוכיח שהמנה בין שני איברים סמוכים היא קבועה.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} - 4(n+1) - 3}{a_n - 4n - 3} = \frac{(2a_n - 4n + 1) - 4(n+1) - 3}{a_n - 4n - 3} = \frac{2a_n - 8n - 6}{a_n - 4n - 3} = 2$$

התוצאה 2 היא יחס קבוע ולכן סדרה b היא הנדסית (התוצאה היא בעצם ה- q של סדרה b).

ב. מצא נוסחא ל- b_n כפונקציה של n בלבד.

תשובה: על-מנת להכיר את הסדרה ההנדסית יש למצוא את האיבר הראשון שלה - b_1.

מציאת b_1: $b_1 = a_1 - 4 \cdot 1 - 3 = 15 - 4 - 3 = 8$

היות וסדרה b היא הנדסית (כפי שהוכחנו) נשתמש בנוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 8 \cdot 2^{n-1} = 4 \cdot 2^n$$

ג. מצא נוסחא ל- a_n כפונקציה של n בלבד.

תשובה:

היה נתון: $b_n = a_n - 4n - 3$ ולכן: $a_n = b_n + 4n + 3$.

את b_n הכרנו כאיבר כללי של סדרה הנדסית וכעת נציב: $a_n = 4 \cdot 2^n + 4n + 3$

<u>שימו לב</u>! a_n הוא <u>לא</u> איבר כללי של סדרה חשבונית <u>ולא</u> איבר כללי של סדרה הנדסית כיוון שמתקבלים האיברים הבאים: 15 , 27 , 47 , 83 ,......

ד. מצא נוסחא ל- S_n של סדרת a, כלומר: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n$

תשובה:

למציאת הסכום יש "לתרגם" את a_n למרכיביו ולחבר בעמודות. סכום כל עמודה יהיה מוכר כסדרה כלשהי ולכן ניתן יהיה רק אז להשתמש בנוסחאות הסכום של סדרה חשבונית והנדסית בהתאם:

$$a_1 = 4 \cdot 2^1 + 4 \cdot 1 + 3$$
$$a_2 = 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 3$$
$$a_3 = 4 \cdot 2^3 + 4 \cdot 3 + 3$$
$$a_4 = 4 \cdot 2^4 + 4 \cdot 4 + 3$$
$$a_5 = 4 \cdot 2^5 + 4 \cdot 5 + 3$$
$$\vdots$$
$$a_n = 4 \cdot 2^n + 4 \cdot n + 3$$

שימו לב שאין צורך לחשב את ערכם של האיברים a_1 , a_2 וכו' כי אם נמצא אותם לא נוכל למצוא את הסכום

כעת נחבר את העמודות בהתאם:

$$S_n = 4\left[2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n\right] + 4\left[1 + 2 + 3 + ... + n\right] + \left[3 + 3 + 3.... + 3\right]$$

(סדרה הנדסית) (סדרה חשבונית) (n פעמים 3)

נחשב את הסכום בהתאם: $S_n = 4 \cdot \frac{2\left(2^n - 1\right)}{2-1} + 4 \cdot \frac{(1+n)n}{2} + 3n$

לאחר כינוס איברים נקבל את התשובה הסופית: $S_n = 2^{n+3} + 2n^2 + 5n - 8$

*<u>הערה:</u>

במידה והיה צריך להוכיח, בדוגמא אחרת, שסדרת b היא סדרה חשבונית אז יש להוכיח כי:-

$b_{n+1} - b_n$ = קבוע

<u>סדרת נסיגה – מקומות זוגיים ומקומות אי-זוגיים</u>

א. כאשר מבקשים: "הוכח שאיברי סדרה a_n במקומות הזוגיים ו/או האי-זוגיים מהווים סדרה חשבונית", יש להראות כי:

$a_{n+2} - a_n$ = מספר קבוע (שאינו תלוי ב- n)

ב. כאשר מבקשים: "הוכח שאיברי סדרה a_n במקומות הזוגיים ו/או האי-זוגיים מהווים סדרה הנדסית", יש להראות כי:

$\frac{a_{n+2}}{a_n}$ = מספר קבוע (שאינו תלוי ב- n)

<u>סיכום בגיאומטריה – שאלון 005</u>

השתדלתי שהסיכום המוגש לכם להלן יעזור להפוך את נושא הגיאומטריה לידידותי יותר עבורכם ופחות מאיים.
בסיכום תמצאו כלים להתמודדות עם השאלות בגיאומטריה והדגשה של נקודות חשובות אליהן יש לשים לב. שימוש בכלים אלה יכול להקל במציאת הדרך לפתרון.

א. <u>כללי</u>

1. **קיימות שתי שיטות מקובלות לכתיבת הוכחה בגיאומטריה.**
   א. שיטת "טענה ונימוק".
   ב. שיטת " המיספור וההסתמכות" – בנוסף לנימוקים הרגילים, מסתמכים על שורה או שורות כגיבוי לנימוק: " לפי שורה 1 ", או " לפי שורות 5, 3, 2 ".

   מניסיוני, שיטת "המיספור וההסתמכות" מקלה ונוחה יותר לשימוש (אין צורך לחלק את הדף לשני אזורים, זה עושה סדר בהוכחה ובמחשבה כי ברור מאיפה כל דבר מגיע). אני ממליץ בחום על שימוש בשיטה זו.

2. **אין לפתור שאלות בגיאומטריה בעזרת טריגונומטריה! - התשובה נפסלת חד וחלק. (וזאת <u>למרות</u> תשובה סופית נכונה).**

3. **חשוב מאד לקרוא היטב את נתוני השאלה – לפעמים דרך הנתונים עצמם "תידלקנה" לכם "נורות" שיצביעו/יזכירו לכם את המשפטים הרלוונטיים לפתרון.**
   מומלץ לרשום בצד את שמות כל המשפטים שנתוני השאלה מזכירים לכם (מה שעולה לכם כאסוציאציות) ולנסות עם משפטים אלו לתקוף את השאלה. (שיטת האלימינציה).

4. **בדרך כלל בבחינה <u>אין נתונים מיותרים</u> ולכן יש להשתמש בכולם להוכחה.**
   במידה ולא השתמשתם באחד הנתונים – סביר להניח שטעיתם.

5. **בכל פתרון של שאלות בגיאומטריה (כולל הוכחת משפטים) יש לרשום:**
   "נתון", צ"ל, "הוכחה". <u>ראו זאת ככלל ברזל!</u>
   רישום מסודר עוזר בהתארגנות לפתרון ומונע דילוג על סעיפים.

6. **בשאלות שסעיף א' שלהן כולל הוכחת משפט – יש לשרטט עבור סעיף זה שרטוט נפרד מהשרטוט הנתון ולהוכיח את המשפט בהתאם.**
   בדרך-כלל, בבחינה, הוכחת המשפט מסעיף א' היא רמז או עזר לפתרון של סעיף ב'.
   עבור סעיף ב' יש לשרטט שרטוט חדש, או את השרטוט הנתון בשאלה.

7. **יש לשרטט את השרטוט בעזרת סרגל ומחוגה (או שבלונת עיגולים) <u>ולא ביד חופשית,</u> ולפיכך, נא להצטייד בהתאם. שרטוט ביד חופשית, בדרך-כלל מטעה ומעוות את התמונה.**

8. **הציור/השרטוט הנתון בשאלה הוא סכמתי וללא קנה מידה. לפיכך, אין להוריד ממנו מידות ואין לקבל ממנו פרופורציות כלשהן על גדלים של צלעות, זוויות, שטחים וכו'.**

9. יש שאלות בהן מומלץ "לרוץ" עם זווית α בשרטוט או "לרוץ" עם צלע x בשרטוט.
במקרה זה, יש לרשום: "נסמן $\sphericalangle ABC = \alpha$" או "נסמן $AD = x$".
את ה"ריצה" יש לכתוב לא רק בשרטוט, אלא גם כחלק אינטגרלי מההוכחה.

10. כאשר משתמשים בזוויות β_1, β_2... או D_1, D_2..., יש להגדירן בהוכחה בעזרת "נסמן..." וגם לסמנם בשרטוט. בנוסף, זוויות שוות ו/או צלעות שוות, ו/או קווים מקבילים מומלץ לסמן בשרטוט (לא להשאיר את השרטוט "עירום"). כדאי להשתמש גם בצבעים.

11. אין להשתמש באותה אות לסימון נעלמים שונים באותה שאלה – לדוגמא:
$\sphericalangle ABC = x$ (זווית), $AB = x$ (קטע), זיכרו – יש עוד אותיות לסימון נעלמים.

12. אין מגבלה לגבי מספר בניות העזר. במידה ומשתמשים בבניית עזר, יש להסביר את הבניה ולסמן אותיות בהתאם ובנוסף <u>חובה לשרטט</u> את השרטוט בדף המבחן.
(בדרך-כלל משתמשים בבניית עזר אחת או שתיים).

13. כאשר משתמשים בבניית עזר חייבים להגדיר את התנאי שבניית העזר מקיימת (למשל – הורדת גובה, העברת משיק, העברת קטע בין שתי נקודות וכד'). בניית עזר זו אינה יכולה לקיים תנאי נוסף – אלא אם כן הוכחתם אותו.

14. לפעמים, כש"לא רואים" את הפתרון, מומלץ להסתכל על השרטוט הנתון מכיוון אחר – מהצד או מלמעלה, לסובב את הדף, ואולי אז "האסימון יירד".

15. אל תחסכו בהסברים מילוליים קצרים ו/או כותרת משנית בשלב הפתרון. לפעמים, הסבר קצר ו/או כותרת יכולים להבהיר לבוחן את כוונתכם בצורה טובה יותר (ואולי, אף להקטין את מספר הנקודות שתרדנה במקרה של טעות).

16. יש לסכם בצורה מילולית את התשובה שהתקבלה: זה מאפשר להתמקד במה ששאלו ולפסול פתרונות מיותרים (בעיקר בשאלות חישוב).
מומלץ בסוף פתרון השאלה לעבור על כל הסעיפים ולראות שעניתם על כולם, ורק על מה שביקשו.

17. יש לרשום יחידות (אורך, שטח, מעלות וכו') לדוגמא:
$AD = 5$ ס"מ. כאשר אין יחידות בשאלה, יש לרשום: $AD = 5$ יחידות אורך.
$S = 50$ סמ"ר. כאשר אין יחידות בשאלה יש לרשום: $S = 5$ יחידות שטח.

18. כאשר יש שימוש בנוסחא או בביטוי אלגברי – הראו קודם כל את הנוסחא/הביטוי ורק לאחר מכן הציבו בהם את המספרים בהתאם. טעות בהצבת המספרים או בחישוב התוצאה, כאשר ברור מקור המספרים תראה אחרת מאשר "סתם לזרוק מספרים". כשלבוחן לא ברור מקור המספרים הוא עלול לפסול את הבחינה בטענה של "חשד להעתקה"!

19. ניתן לשלב בהוכחה גיאומטרית גם משוואות באלגברה וזאת על-מנת למצוא זוויות, צלעות, שטחים וכו'.

20. בשאלה שבה יש שני סעיפים ויותר, במידה ואינכם מצליחים להוכיח את הסעיף הראשון נסו להוכיח את הסעיפים הבאים כאילו "הוכחתם" את הסעיף הראשון.
כך אולי תקבלו נקודות על הסעיפים הבאים (לפחות תצברו חלק מהנקודות).

21. שימו לב! בדרך-כלל, בבדיקת בחינה, ברגע שנעשה שימוש בנימוק/משפט לא נכון <u>כאן נעצרת בדיקת השאלה</u> (גם אם התוצאה הסופית יצאה <u>במקרה</u> נכונה) לכן, מאד חשוב להיות מדוייקים בטענות ובנימוקים בהם אתם משתמשים.

22. מאד חשוב לכתוב את ההוכחה בצורה מאורגנת, נקייה, ברורה, מרווחת, לא לחלק את הדף לשניים, בלי חיצים של "סימני דרך" ולזכור שיש מקום גם מעבר לדף.
בין סוף הוכחת סעיף א' להתחלת הוכחת סעיף ב' יש לשים רווח של מספר שורות.
כל סעיף רלוונטי צריך להסתיים ב:- " מ.ש.ל. א' ", " מ.ש.ל. ב' " וכו'.

את תשובה הסופית יש לכתוב בצורה ברורה בסוף הפתרון, בוודאי לא מוחבאת (ואפילו מודגשת במרקר).
יש לתת לתשובה הסופית את <u>"הכבוד הראוי לה".</u>

23. יש להדגיש שהאסתטיקה בכתיבת הבחינה:
א. עוזרת בארגון המחשבה, יכולה להפחית מהלחץ ואולי אפילו להוציא "מבלק-אאוט זמני" ובסך-הכל יכולה לעזור בהגעה לפתרון הנכון.
ב. מאפשרת לבודק הבחינה להבחין בכל הפרטים שכתבתם ולהבינם טוב יותר ובכך מונעת הורדת נקודות לחינם.

זיכרו! הבחינה שאתם מגישים היא כמו מוצר שחייב להיות אסתטי ומושך את העין על-מנת ש"הלקוח" – הבודק, יבחין בכל פרטיו.

ב. <u>עקרונות במשפטי חפיפה ודמיון</u>

1. **יש לשים לב שאת "משפט החפיפה" החמישי - ז.ז.צ. <u>לא מקבלים בבחינות כמשפט</u>. שימוש בו כמשפט מוריד נקודות ולכן יש להפוך משפט זה למשפט חפיפה ז.צ.ז. על-ידי הוכחה שגם הזווית השלישית שווה בשני המשולשים (הזווית השלישית משלימה ל- 180°).**

2. **שימו לב שבמשפטי החפיפה האות "צ" פירושה שהצלע שווה בשני המשולשים. לעומת זאת, במשפטי הדמיון, האות "צ" פירושה שיש פרופורציה (יחס) בין הצלעות. האות "ז" פירושה - גם במשפטי החפיפה וגם במשפטי דמיון - שהזווית שווה בשני המשולשים.**

3. **במשולש – מול צלעות שוות זוויות שוות ולהיפך. שימו לב! משפט זה נכון כשמדובר באותו משולש עצמו <u>ולא בין שני משולשים</u>.**

4. **בשאלות בפרופורציה ודמיון יש לפרק את המשולשים הדומים, "להוציא אותם החוצה" מהשרטוט, לשרטט אותם אחד ליד השני (ושיהיה דמיון ביניהם) ולהתאים את הקודקודים לזוויות השוות.**
   יש לרשום את אורכי הצלעות והשטחים הידועים על השרטוט המקורי ועל המשולשים הדומים שהוצאו. רישום כזה מאד עוזר לראות מה קיים ואולי גם את הדרך לפתרון.

5. **גם בשאלות בפרופורציה ודמיון, לצורך הבהרה, יש לציין את שמו של המשולש אליו מתייחסים.**

6. **במשפט דמיון ז.ז. יש להתייחס לזווית השלישית בצורה מילולית – "ולכן גם הזווית השלישית שווה , כי היא משלימה ל- 180°" , או להראות זאת בחישוב מתמטי. בכל מקרה – נא להתייחס לזווית השלישית.**

7. **קיימים מספר משפטים בגיאומטריה שבנימוק ניתן לציינם בשמם בלבד:**

משפט פיתגורס
משפט תאלס
משפט חוצה הזווית
ארבעת משפטי החפיפה
משפטי הדמיון
זווית בין משיק למיתר
משפט תאלס המורחב
משפט הפוך למשפט תאלס

<u>שימו לב</u>! <u>את יתר המשפטים, שאינם מופיעים בפירוט שלעיל, יש לנסח במדוייק</u>.

משפטים בגיאומטריה - נקודות חשובות לתשומת לב:

בגיאומטריה יש מספר לא-מבוטל של משפטים ואת רובם אתם, התלמידים, מכירים.
ברצוני להסב את תשומת לבכם לנקודות חשובות ולשים דגשים שיוכלו לעזור לכם להבין, לזכור ולהכיר טוב יותר חלק מהמשפטים ובכך לאפשר לכם לעשות שימוש נכון יותר בהם.

קיימים ארבעה משפטי חפיפה:
(משפטים אלו הינם משפטים שמותר לציין בנימוק את שמם בלבד)

1. **משפט חפיפה צ.ז.צ - צלע, זווית, צלע**
2. **משפט חפיפה ז.צ.ז - זווית, צלע, זווית**
3. **משפט חפיפה צ.צ.צ - צלע, צלע, צלע**
4. **משפט חפיפה צ.צ.ז. - צלע, צלע, זווית**

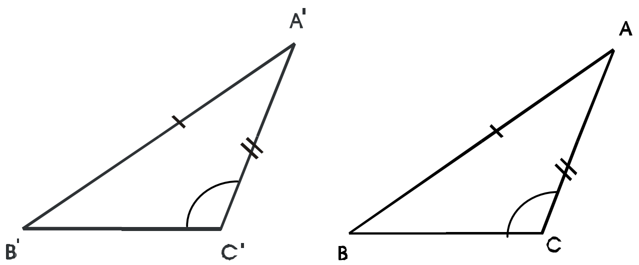
הבהרה לגבי משפט החפיפה הרביעי (צ.צ.ז.):

משפט זה אומר:

"אם בשני משולשים שוות בהתאמה שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מהשתיים – אז המשולשים חופפים.

שימו לב!
בנוסף לשתי הצלעות השוות והזווית השווה יש להראות כי הזווית השווה אכן נמצאת מול הצלע הגדולה מהשתיים! רק אז המשולשים חופפים!

דוגמא:



1. $AB = A'B'$ **(נתון)**
2. $AC = A'C'$ **(נתון)**
3. $AB > AC$ **(נתון)** **לא לשכוח!**
4. $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$ **(נתון)**

5. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ **(המשולשים חופפים לפי משפט חפיפה צ.צ.ז. ולפי שורות 4 - 1).**

ממשפט החפיפה הרביעי ניתן להסיק כי: -
שני משולשים ישרי זווית השווים ביתר ובאחד הניצבים – חופפים.
(הזווית השווה בשני המשולשים היא $90°$, היתר הוא הגדול בין שתי הצלעות השוות והזווית הישרה היא מול היתר – לפיכך, כל תנאי משפט החפיפה הרביעי מתקיימים).

כאשר משתמשים במשפטי החפיפה הניסוח יהיה לדוגמא: -
"המשולשים חופפים לפי משפט חפיפה צ.צ.צ. ולפי שורות 2, 4, 7 ".

הערה: - לאחר ההוכחה כי המשולשים חופפים, ניתן להשתמש בנימוק: "צלעות מתאימות במשולשים חופפים שוות" (צמב"ח) ובנימוק: "זוויות מתאימות במשולשים חופפים שוות" (זמב"ח)

סוגי זוויות בין ישרים מקבילים

קיימים שלושה סוגי זוויות בין ישרים מקבילים: זוויות מתאימות, זוויות מתחלפות וזוויות חד-צדדיות.

בנוסף להגדרות המקובלות של זוויות אלו קיימת שיטה הנקראת "שיטת החיצים" שבעזרתה ניתן לזהות את סוגי הזוויות הנ"ל.

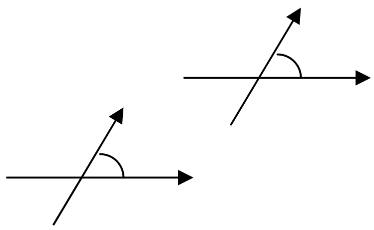
"שיטת החיצים":
סימון החיצים יהיה על שוקי הזווית וכיוונם מקודקוד הזווית החוצה.
כאשר החיצים באותו הכיוון נסמן (+), כאשר החיצים בכיוונים מנוגדים נסמן (-).

אם מתקבלת מכפלה חיובית בין הסימנים, הזוויות הן או מתאימות או מתחלפות:
הזוויות מתאימות כאשר שני הסימנים חיוביים (+) = (+) · (+)
הזוויות מתחלפות כאשר שני הסימנים שליליים (+) = (-) · (-)

אם מתקבלת מכפלה שלילית, הזוויות הן חד-צדדיות וסכומן שווה ל- 180°.

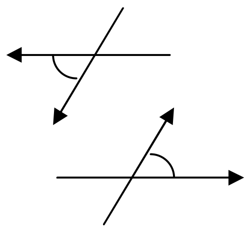
זוויות מתאימות:- כאשר החיצים של שני זוגות הישרים המקבילים באותו הכיוון:

(+) · (+) = (+)



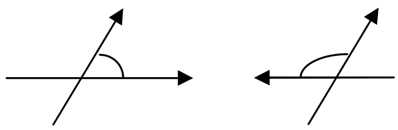
זוויות מתחלפות:- כאשר החיצים של שני זוגות הישרים המקבילים בכיוונים מנוגדים:

(-) · (-) = (+)



זוויות חד-צדדיות:- כאשר החיצים של זוג אחד מהישרים המקבילים באותו הכיוון ואילו החיצים של זוג הישרים המקבילים השני יהיו בכיוונים מנוגדים:

(+) · (-) = (-)



דוגמאות לניסוח הנימוק: "זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות"
"זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים שוות"
"סכום זוויות חד-צדדיות בין ישרים מקבילים שווה ל- 180°."

<u>משולשים – משפטים שחשוב לזכור במיוחד</u>

1. שלושת האנכים האמצעים במשולש נפגשים בנקודה אחת.
מפגש שלושת האנכים האמצעים במשולש זהו מרכז המעגל <u>החוסם</u> את המשולש.

<u>שימו לב!</u>
א. מרכז המעגל החוסם משולש ישר-זווית יהיה באמצע היתר.
ב. אם בשאלה נתון מרכז מעגל חוסם, אז הקטעים ממרכז המעגל החוסם לקודקודים שווים, כי הם רדיוסים, ויוצרים שלושה משולשים שווי-שוקיים. לפעמים זוהי בניית עזר מתבקשת.

2. שלושת חוצי הזוויות במשולש נפגשים בנקודה אחת.
מפגש חוצי הזוויות במשולש זהו מרכז המעגל <u>החסום</u> במשולש.

<u>שימו לב!</u> אם בשאלה נתון מרכז מעגל חסום, אז הקטעים ממרכז המעגל החסום לקודקודים חוצים את זוויות המשולש. לפעמים זוהי בניית עזר מתבקשת.

3. במשולש ישר-זווית שזוויותיו החדות הן $30°$ ו- $60°$: הניצב שמול זווית ה- $30°$ שווה למחצית היתר.

שימו לב! לפעמים כדאי לסמן את הצלע מול ה-$30°$ ב- x ואת היתר ב- $2x$ ולהתחיל ב"ריצה" עם x בשאר הצלעות.

וההפוך: - אם במשולש ישר-זווית אחד מהניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית שמול ניצב זה שווה ל- $30°$.

4. התיכון ליתר במשולש ישר-זווית שווה למחצית היתר.

וההפוך:- משולש שבו אחד מהתיכונים שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, הוא משולש ישר-זווית (הזווית שמול הצלע הנ"ל היא $90°$).

5. כל שני תיכונים במשולש מחלקים זה את זה לשני קטעים כך שהקטע הקרוב לקודקוד גדול פי 2 מהקטע הקרוב לצלע.
שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

6. קטע אמצעים במשולש המחבר אמצעי שתי צלעות מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.

וההפוך:- קטע במשולש היוצא מאמצע צלע אחת ומקביל לצלע השלישית, חוצה את הצלע השנייה.

הפוך נוסף: - קטע המחבר שתי נקודות הנמצאות על שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע שלישית ושווה למחציתה – הוא קטע אמצעים.

7. **שלושת הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.**

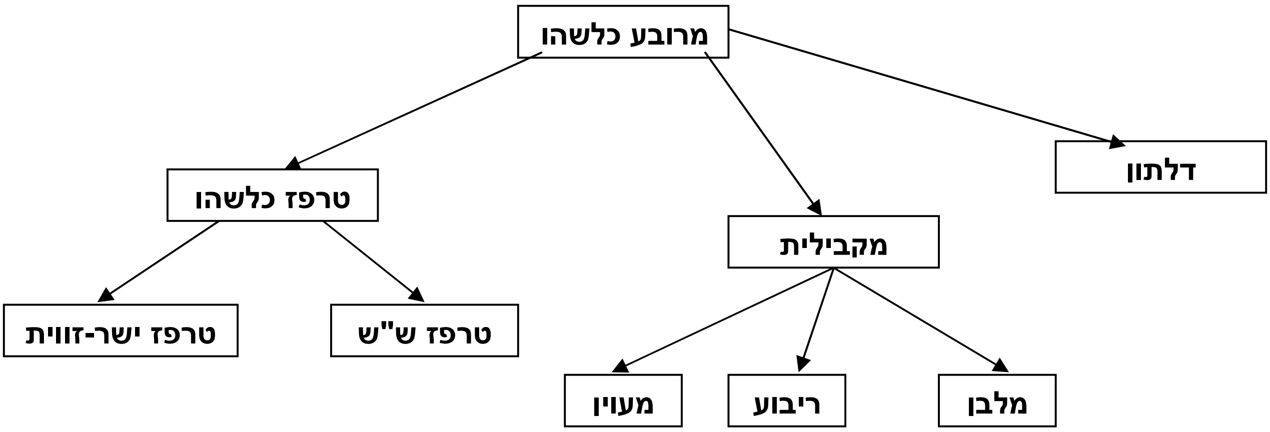
8. **שימו לב! כאמור, במשולש, הגבהים, התיכונים, חוצי הזוויות והאנכים האמצעיים נפגשים בנקודה (ולא באותה נקודה).**

<u>רק במשולש שווה-צלעות, נקודת המפגש של כולם תהיה אותה נקודה</u>!

לפעמים, כאשר נתונה בשאלה נקודת מפגש של שניים מהגבהים/תיכונים/חוצי-זוויות/אנכים אמצעיים כדאי להשתמש בבניית עזר ולהעביר דרך נקודה זו גם את הקו השלישי.

<u>מרובעים - משפטים נבחרים</u>

<u>המרובעים</u>



1. **<u>כללי</u>**
   א. **חשוב מאד להכיר את תכונות המקבילית ואת המשפטים הקשורים בה. זהו הבסיס לצורות הנוספות – מלבן, ריבוע, מעוין.**
   ב. **כאשר מבקשים להוכיח שמרובע למשל הוא מעוין, נצטרך, בדרך-כלל, להוכיח קודם כל שהוא מקבילית ובנוסף להוכיח תכונה המייחדת אותו כמעוין ואינה קיימת בכל מקבילית.**

2. **<u>תכונות המקבילית</u>:**

   א. **כל שתי זוויות נגדיות במקבילית שוות זו לזו.**
   ב. **מרובע שכל שתי זוויות נגדיות שלו שוות זו לזו הוא מקבילית.**
   ג. **כל שתי צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו.**
   ד. **מרובע שכל שתי צלעות נגדיות שלו שוות זו לזו הוא מקבילית.**
   ה. **האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה.** **<u>משפט חשוב ושימושי</u>**
   ו. **מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.** **<u>משפט חשוב ושימושי</u>**
   ז. **מרובע ששתיים מצלעותיו הנגדיות גם שוות וגם מקבילות הוא מקבילית.**
   <u>משפט חשוב ושימושי</u>

3. <u>תכונות המלבן:</u>

א. המלבן הוא מקבילית בעלת זווית ישרה.
ב. האלכסונים במלבן שווים זה לזה.
ג. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.

4. <u>תכונות המעוין:</u>

א. מקבילית בעלת שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.
ב. מרובע שכל צלעותיו שוות הוא מעוין.
ג. אלכסוני המעוין חוצים את זוויות המעוין.
ד. מקבילית שבה אלכסון אחד חוצה זווית אחת הוא מעוין.
ה. אלכסוני המעוין מאונכים זה לזה.
ו. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

5. <u>תכונות הריבוע</u>.

א. מעוין בעל זווית ישרה הוא ריבוע.
ב. מלבן בעל שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.
ג. מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות הוא ריבוע.

6. <u>הטרפז:</u>

<u>הגדרה</u>:- מרובע שבו רק זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות נקרא טרפז.

<u>שימו לב</u>:-

א. על- מנת להוכיח שמרובע הוא טרפז, יש להוכיח, בהתאם להגדרה ,שזוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות <u>וגם</u> שהזוג השני של הצלעות הנגדיות <u>אינו</u> מקביל (בדרך כלל שוכחים להתייחס לזוג השני של הצלעות ועל כך יכולות לרדת נקודות).
ב. במקום להוכיח שהזוג השני של הצלעות אינו מקביל ניתן גם להוכיח כי הבסיסים של המרובע מקבילים אך <u>שונים</u> כיוון שבטרפז הבסיסים לא יכולים להיות שווים (אחרת זו תהיה מקבילית).
ג. סכום הזוויות ליד כל שוק בטרפז שווה ל- 180° (חד צדדיות),
לעומת זאת, סכום זוויות הבסיס בטרפז <u>אינו</u> שווה ל- 180°.

<u>תכונות טרפז שווה שוקיים:</u>

א. זוויות הבסיס בטרפז שווה שוקיים שוות זו לזו.
ב. טרפז שבו זוויות הבסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.
ג. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
ד. טרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

<u>קטע אמצעים בטרפז:</u>

א. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
ב. קטע היוצא מאמצע שוק אחת בטרפז ומקביל לבסיסים חוצה את השוק השניה.

<u>המעגל – משפטים נבחרים</u>

1. למיתרים שווים מתאימות זוויות מרכזיות שוות.
2. לזוויות מרכזיות שוות מתאימים מיתרים שווים.
3. אנך מהמרכז למיתר במעגל חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה ואת הקשת המתאימה.
4. קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.
5. הזווית המרכזית במעגל גדולה פי שתיים מכל זווית היקפית הנשענת על אותה קשת.

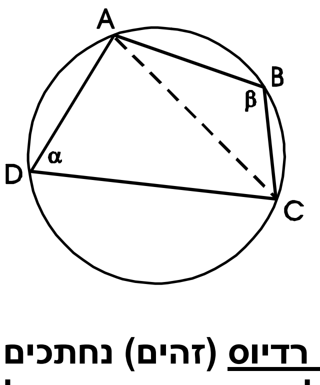
והמסקנות ממשפט זה הן:-

א. כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו.
ב. זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- $90°$.
ג. זווית היקפית בת $90°$ נשענת על קוטר.

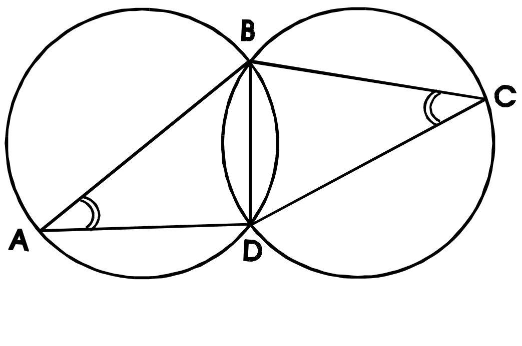
6. זוויות היקפיות שוות נשענות על מיתרים שווים.
7. על מיתרים שווים נשענות זוויות היקפיות שוות. (ראה "שימו-לב" א')
8. זוויות היקפיות שוות נשענות על קשתות שוות.
9. על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות.

<u>שימו לב</u>!

א. שתי הזוויות ההיקפיות שבשרטוט α ו- β נשענות על המיתר AC <u>אך אינן נשענות על אותה קשת ולכן אינן שוות.</u>
(במקרה זה סכומן הוא $180°$ בהתאם למשפט מרובע חסום במעגל).



ב. כאשר שני מעגלים <u>בעלי אותו רדיוס</u> (זהים) נחתכים ולהם מיתר משותף, ניתן להתייחס לזוויות ההיקפיות הנשענות על המיתר בשני המעגלים כזוויות שוות:
$\sphericalangle A = \sphericalangle C$ (שתי הזוויות ההיקפיות נשענות על הקשתות הקטנות שבשני המעגלים)



10. משיק למעגל

א. הזווית בין משיק לרדיוס (ולקוטר), הנפגשים בנקודת ההשקה, שווה ל- $90°$.
ב. ישר המאונך לרדיוס בקצהו, משיק למעגל.
ג. שני משיקים למעגל, היוצאים מאותה נקודה, שווים זה לזה.
ד. הקטע המחבר את מרכז המעגל עם הנקודה ממנה יוצאים שני המשיקים במעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים. (חוצה גם את הזווית המרכזית).

ה. <u>זווית בין משיק למיתר</u> (משפט זה הוא משפט שמותר לציין בנימוק את שמו בלבד)

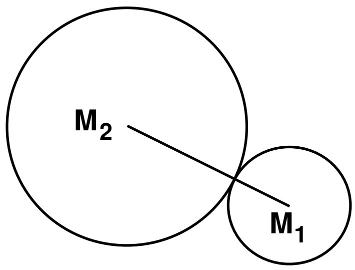
הזווית בין משיק למיתר הנפגשים בנקודת ההשקה שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני.

ו. נקודת המגע של שני מעגלים משיקים נמצאת על קטע המרכזים או על המשכו.

<u>שימו לב</u>!

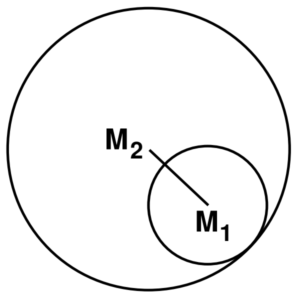
1. כאשר ההשקה מבחוץ, קטע המרכזים שווה לסכום הרדיוסים.

$$\overline{M_1M_2} = R_1 + R_2$$



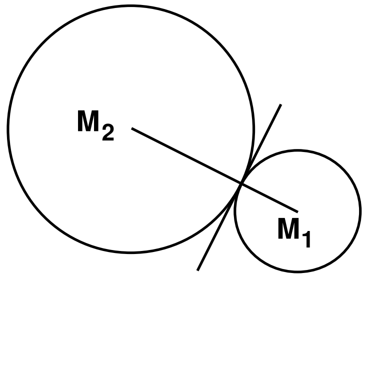
2. כאשר ההשקה מבפנים, קטע המרכזים שווה להפרש הרדיוסים.

$$\overline{M_1M_2} = R_2 - R_1$$



<u>שימו לב</u>! נקודת המגע נמצאת על המשכו של קטע המרכזים.

3. בנקודת המגע של שני מעגלים משיקים יש משיק משותף לשני המעגלים ולכן מומלץ, לפעמים, שבניית העזר תהיה העברת המשיק המשותף – זה יאפשר למצוא את הזוויות בין משיק למיתר.



11. <u>מרובע חסום במעגל</u>

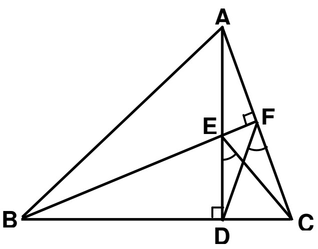
א. בכל מרובע החסום במעגל, סכום כל שתי זוויות נגדיות שווה ל- 180°.
ב. אם במרובע יש זוג אחד של זוויות נגדיות, שסכומן 180°, אז ניתן לחסום אותו במעגל (המרובע בר-חסימה).

<u>שימו לב</u>!

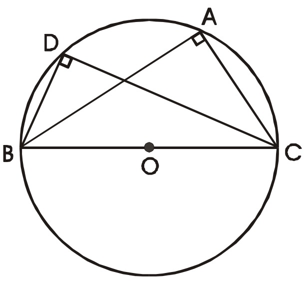
1. בדרך-כלל, ניסוח השאלה יהיה:
"הוכח שאת המרובע ABCD ניתן לחסום במעגל" או "הוכח שמרובע ABCD הוא בר-חסימה". משמעותם של שני הניסוחים זהה.
דרך הפתרון:- למצוא זוג אחד (בלבד) של זוויות נגדיות שסכומן 180°.

2. לפעמים, יש להוכיח שוויון בין שתי זוויות וקשה למצוא את הפתרון לכך:
נסו לחפש מעגל חוסם למרובע המכיל את קודקודי הזוויות ולשרטט אותו - אולי תוכלו דרך זוויות היקפיות שוות למצוא את הפתרון.

לדוגמא - "הוכח $\sphericalangle DEC = \sphericalangle DFC$".
חיסמו במעגל את מרובע DEFC...



3. על אותו רעיון, כאשר בשאלה יש שני משולשים ישרי-זווית, בעלי יתר משותף, ניתן לחסום אותם במעגל שמרכזו אמצע היתר ולשרטט אותו - אולי תוכלו דרך זוויות היקפיות שוות למצוא את הפתרון.



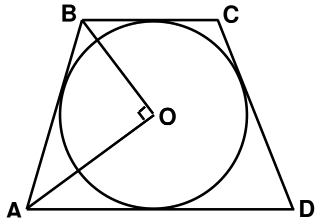
4. אם במרובע כל ארבעת האנכים האמצעיים לצלעות המרובע נפגשים בנקודה אחת, אז הנקודה היא מרכז המעגל החוסם (אנך אמצעי הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מקצות הקטע שווה).

12. <u>מרובע חוסם מעגל</u>

א. במרובע חוסם מעגל סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.
ב. אם במרובע סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני, אז אפשר לחסום מעגל במרובע.

__שימו לב!__
מכל קודקוד של המרובע יוצאים שני משיקים שווים עד לנקודות ההשקה.

ג. כאשר טרפז חוסם מעגל הזווית AOB שווה ל- 90°.



ד. מרכז המעגל החסום במרובע הוא מפגש ארבעת חוצי הזוויות של המרובע (חוצה זווית הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהשוקיים שווה).

13. __מצולע משוכלל__

__הגדרה__: מצולע משוכלל הוא מצולע שכל צלעותיו שוות, וכל זוויותיו שוות.

א. כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל (המעגל חוסם את המצולע).
ב. בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל (המעגל חסום ע"י המצולע).

__שטחים – משפטים נבחרים__

יחידות השטח הן: סמ"ר, מ"ר וכו'. כאשר אין יחידות בשאלה, יש לרשום "יחידות שטח".

1. **שטח המלבן שווה למכפלת צלע אחת בצלע השניה.** $S = a \cdot b$
היקף המלבן הוא:- $P = 2(a+b)$

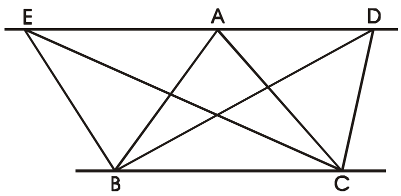
2. **שטח ריבוע שווה למכפלת צלע הריבוע בעצמה.** $S = a^2$
היקף הריבוע הוא:- $P = 4a$

3. **שטח מקבילית שווה למכפלת צלע בגובה שלה.** $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$
(שימו לב! למקבילית שתי צלעות שונות ולכן יש גם שני גבהים שונים).
היקף המקבילית הוא:- $P = 2(a+b)$

4. **__שטח משולש שווה למחצית המכפלה של צלע בגובה שלה.__** $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$
(h_a - הגובה לצלע a)
היקף המשולש הוא:- $P = a + b + c$

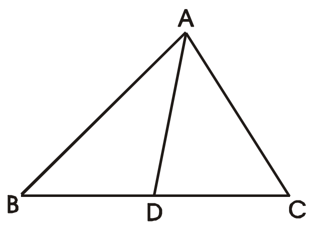
מקרים מיוחדים:

א. משולשים בעלי בסיס משותף ושהקודקוד השלישי שלהם נמצא על ישר המקביל לבסיס משותף זה, הם בעלי שטחים שווים.



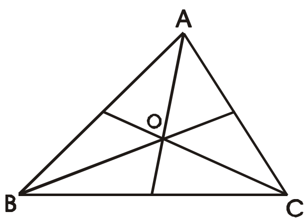
בין שני ישרים מקבילים עוברים אנכים (גבהים) שווים ולכן לשלושת המשולשים אותו הגובה וגם אותו הבסיס BC ומכאן: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta EBC} = S_{\Delta DBC}$.

ב. התיכון במשולש מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח.

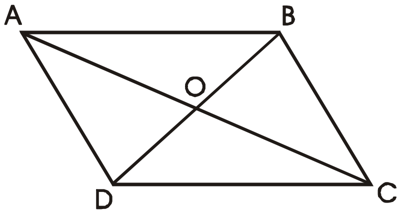


לשני המשולשים שנוצרו אותו גודל בסיס BD = DC וגובה משותף ומכאן נובע שהשטחים שלהם שווים: $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta DAC}$

ג. שלושת התיכונים במשולש מחלקים אותו לשישה משולשים שווי שטח.



ד. האלכסונים במקבילית מחלקים אותה לארבעה משולשים שווי שטח.
ניתן לראות את BO כתיכון במשולש ABC.



<u>שימו לב!</u>
שטחים שווים <u>אין פירושו</u> משולשים חופפים, אך למשולשים חופפים – שטחים שווים.

5. <u>דרכים נוספות למציאת שטח משולש</u>:

א. שטח משולש שווה למכפלת <u>מחצית</u> ההיקף של המשולש ברדיוס המעגל החסום במשולש: $S = p \cdot r$

כאשר: $p = \frac{a+b+c}{2}$ **(<u>מחצית</u> היקף המשולש) ו- r הוא רדיוס המעגל החסום.**

ב. שטח משולש באמצעות הצלעות a, b, c (נוסחת הרון) :

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ **(p <u>מחצית</u> היקף המשולש)**

6. שטח טרפז שווה למחצית המכפלה של סכום הבסיסים בגובה. $S = \frac{(a+b)h}{2}$

7. שטח מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה שווה למחצית מכפלת האלכסונים זה בזה:

$$S = \frac{k_1 \cdot k_2}{2}$$

(מעוין, ריבוע ודלתון הינם מרובעים שאלכסוניהם מאונכים זה לזה).

8. שטח עיגול (S) שרדיוסו R ניתן על-ידי הנוסחא: $S = \pi R^2$

9. היקף מעגל (P) שרדיוסו R ניתן על-ידי הנוסחא: $P = 2\pi R$

<u>שימו לב</u>!

בשאלות בנושא שטחים כאשר מבקשים להוכיח שוויון בין שני שטחים, מומלץ:

א. לבדוק מאילו צורות הנדסיות מורכב כל שטח ולחפש צורות משותפות לשני השטחים ואז ניתן לפשט את הבעיה ולהוכיח את "מה שנשאר".

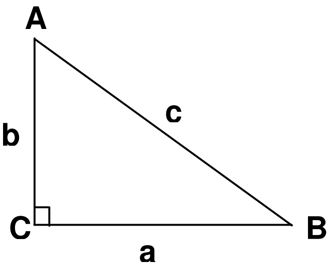
ב. לחפש צלעות שוות/בסיסים שווים.

ג. לחפש גבהים שווים ובעיקר בין ישרים מקבילים.

<u>משפט פיתגורס</u>

(משפט זה הוא משפט שמותר לציין בנימוק את שמו בלבד)

בכל משולש ישר-זווית סכום שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר.



$$a^2+b^2=c^2$$

<u>שימו לב</u>!

היתר בריבוע (הצלע הגדולה במשולש) שווה לסכום ריבועי הניצבים (הצלעות הקטנות יותר במשולש).

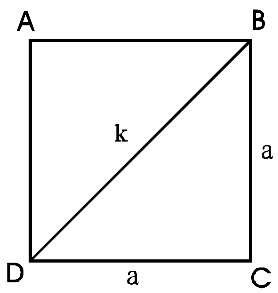
<u>משפט הפוך למשפט פיתגורס</u>:

אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית אז המשולש הוא ישר-זווית. (הזווית הישרה מול הצלע הגדולה).

<u>שימושים אחדים במשפט פיתגורס</u>:

1. <u>מציאת אורך אלכסון של ריבוע</u>:

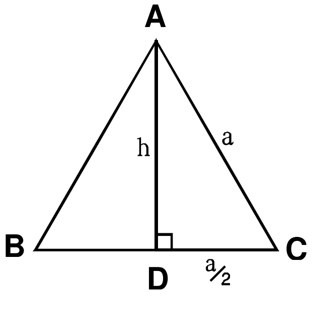
משפט פיתגורס במשולש BDC



$$k^2=a^2+a^2=2a^2$$
$$k=a\sqrt{2}$$

2. <u>מציאת גובה במשולש שווה צלעות</u>

משפט פיתגורס במשולש ADC



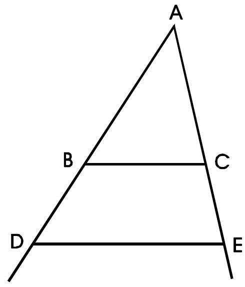
$$h^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3a^2}{4}$$
$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

<u>שימו לב</u>! בשתי הדוגמאות שלעיל הבהרנו על איזה משולש חל משפט פיתגורס – נא הקפידו לעשות זאת – זה נדרש בבחינות ומאפשר לכם ולבוחן מעקב טוב יותר אחר מהלך הפתרון.

<u>פרופורציה ודמיון – משפטים נבחרים</u>

1. <u>משפט תאלס</u> (משפט זה הוא משפט שמותר לציין בנימוק את שמו בלבד)

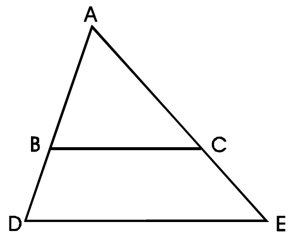
שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים עליהם קטעים פרופורציוניים.



$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$$

א. <u>למשפט תאלס יש שתי הרחבות- הרחבה א' והרחבה ב'</u>:

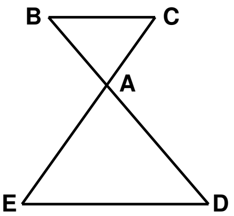
בהרחבה א' משתמשים כאשר רוצים להתייחס לצלעות האופקיות המקבילות BC, DE.



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

על-מנת לזכור ביותר קלות: "צלע במשולש הקטן חלקי צלע בהתאמה במשולש הגדול"

בהרחבה ב' משתמשים כאשר יש צורה של "שעון חול":   ED וו BC



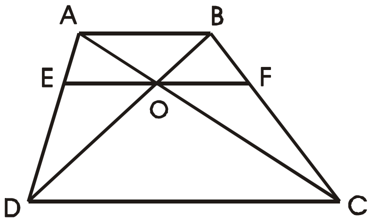
$$\frac{BA}{AD} = \frac{CA}{AE} = \frac{BC}{ED}$$

על-מנת לזכור ביותר קלות: "צלע חלקי ההמשך שלה"

ב. ניתן לשלב בין משפט תאלס והרחבותיו.

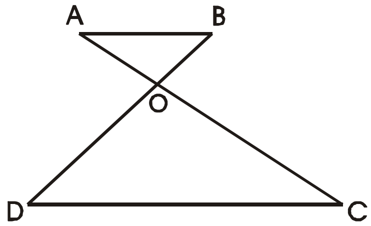
ג. כאשר נתונה שאלה בפרופורציה ודמיון, יש לחפש בשרטוט את "שוקי הזווית" ואת "שעון החול".

לדוגמא:
נתון טרפז ונתון ש:- $AB \parallel EF$

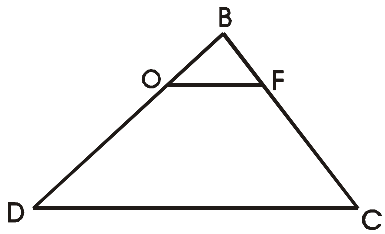


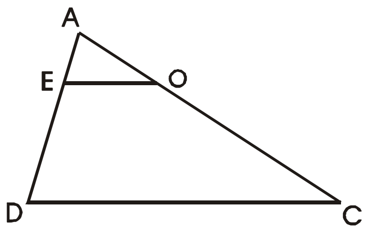
להבהרה, "נוציא" את "שעון החול" ו"שוקי הזווית" מהשרטוט:

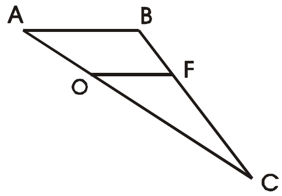
<u>"שעון חול"</u>

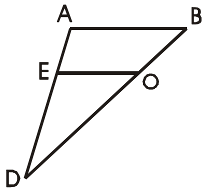


<u>"שוקי הזווית"</u>









<u>שימו לב!</u>

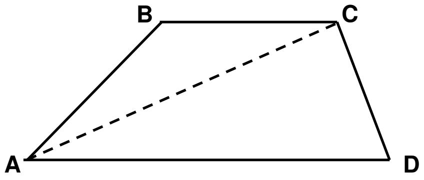
כאשר משתמשים בצלעות האופקיות המקבילות EO, FO, יש להשתמש בהרחבה א'.

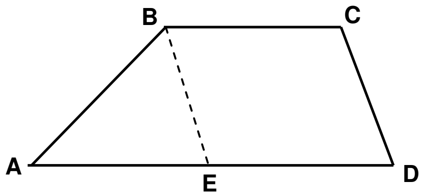
לדוגמא: במשולש BDC מתקיים $\frac{FO}{CD}=\frac{BO}{BD}$.

ד. בניות עזר שיש להכיר הן:

1) הפיכת טרפז למקבילית ומשולש על-ידי העברת קו מקביל לאחת השוקיים: CD ו BE וכעת יש "שוקי זווית".

2) העברת האלכסון AC וכעת יש "שוקי זווית".



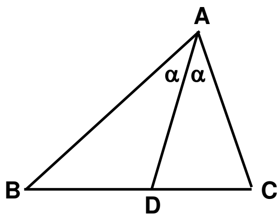


2. <u>משפט הפוך למשפט תאלס:</u> (משפט זה הוא משפט שמותר לציין בנימוק את שמו בלבד)

שני ישרים המקצים על שוקי זווית קטעים פרופורציוניים מקבילים זה לזה.

3. <u>משפט חוצה הזווית</u> (משפט זה הוא משפט שמותר לציין בנימוק את שמו בלבד)

חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים המתייחסים זה לזה כמו היחס שבין שתי הצלעות הכולאות את הזווית.



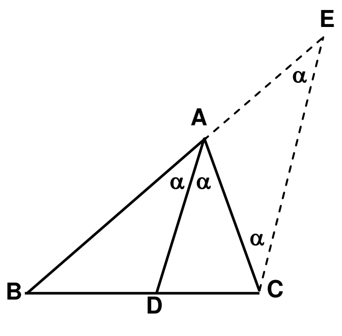
$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

א. יש לשים לב לכיוון:- אם בחרתם קטע שמאל (BD) חלקי קטע ימין (DC), אז גם בין הצלעות הכולאות את הזווית יש לבחור צלע שמאל (AB) חלקי צלע ימין (AC). (אותו סדר/כיוון).

ב. כאשר בשאלה מופיעה המילה "חוצה זווית" – אמורה <u>"להידלק אצלכם נורה"</u> – כלומר, אולי אפשר להשתמש במשפט חוצה הזווית.

ג. יש לדעת להוכיח את משפט חוצה הזווית!
הרעיון – מעבירים כבניית עזר קו CE המקביל לחוצה הזווית AD, מוכיחים ש- AC = AE בעזרת זוויות מתאימות ומתחלפות (משולש ACE שווה שוקיים) ומשתמשים במשפט תאלס במשולש BEC:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AE}$$ **ולכן:** $$\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AC}$$

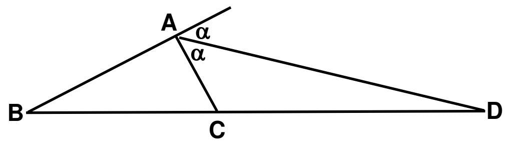


4. <u>משפט הפוך למשפט חוצה הזווית</u>

קטע המחבר קודקוד במשולש עם הצלע שמולו ומחלק אותה לשני קטעים המתייחסים זה לזה כמו היחס שבין שתי הצלעות האחרות – חוצה את זווית המשולש.

5. <u>משפט חוצה זווית חיצונית</u>

חוצה זווית חיצונית למשולש מחלק את הצלע שמול הזווית הפנימית כך, שהיחס בין הקטע המכיל את הצלע והמשכה, לבין המשכה של הצלע שווה ליחס שבין הצלעות הכולאות את הזווית הפנימית.



$$\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

<u>שימו לב!</u>
הנקודה D "יצאה החוצה" (ממשולש ABC) אך הנוסחא היא אותה נוסחא של חוצה זווית פנימית במשולש ולכן קל לזכור אותה.
על-מנת להוכיח את משפט חוצה זווית חיצונית מעבירים כבניית עזר קו CE המקביל לחוצה הזווית AD (כמו שעשינו בהוכחת משפט חוצה זווית פנימית).

6. <u>משפט הפוך למשפט חוצה זווית חיצונית</u>

ישר העובר דרך קודקוד של משולש ומחלק את הצלע שמול הקודקוד חלוקה חיצונית ביחס השווה ליחס שבין שתי הצלעות האחרות – חוצה את הזווית החיצונית שליד הקודקוד.

משולשים דומים

הגדרה:
שני משולשים נקראים דומים אם שלוש הזוויות שלהם שוות בהתאמה וקיים יחס שווה בין שלושת זוגות הצלעות המתאימות.

שימו לב!
ישר המקביל לצלע של משולש חותך ממנו משולש הדומה לו.

1. משפטי הדמיון (השימושיים)

א. משפט דמיון צ.ז.צ. – אם בשני משולשים קיים יחס שווה בין שני זוגות צלעות מתאימות והזווית שביניהן שווה בהתאמה אז המשולשים דומים.

ב. משפט דמיון ז.ז. – אם בשני משולשים שוות בהתאמה שתי זווית אז המשולשים דומים. (כאמור, יש להתייחס גם לזווית השלישית מילולית או מתמטית).

ג. משפט דמיון צ.צ.צ – אם בשני משולשים קיים יחס שווה בין שלושת זוגות הצלעות המתאימות, אז המשולשים דומים.

2. קטעים מתאימים במשולשים דומים

הגבהים, ההיקפים, חוצי הזוויות, התיכונים, הרדיוסים של מעגלים החוסמים, הרדיוסים של מעגלים החסומים במשולשים דומים – מתייחסים זה לזה כיחס הצלעות המתאימות.

3. שטחי משולשים דומים

השטחים של משולשים דומים מתייחסים זה לזה כריבוע היחס שבין הצלעות המתאימות.

שימו לב!
כשמדובר ביחס השטחים ההתייחסות היא כריבוע יחס הצלעות המתאימות.
כשמדובר בקטעים ההתייחסות היא כיחס הצלעות המתאימות.

4. יש לדעת להוכיח את המשפטים בנושא קטעים מתאימים במשולשים דומים ושטחי משולשים דומים (סעיפים 2 ו-3 לעיל).

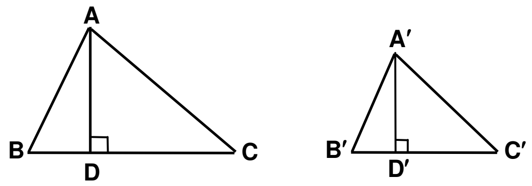
זיכרו! - לכל הוכחת משפט יש לשרטט **שרטוט נפרד**.

דוגמאות:

א. "הוכח שבמשולשים דומים יחס הגבהים הוא כיחס הצלעות המתאימות".

נתון: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
AD, $A'D'$ גבהים.

צ"ל: $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AC}{A'C'}$



הוכחה:

1) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (נתון)

2) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ (במשולשים דומים קיים יחס שווה בין הצלעות המתאימות – לפי 1).

3) $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$ (במשולשים דומים הזוויות שוות בהתאמה - לפי 1).

4) $\sphericalangle ADC = \sphericalangle A'D'C' = 90°$ (נתונים גבהים).

5) $\sphericalangle CAD = \sphericalangle C'A'D'$ (הזווית השלישית משלימה ל- 180° – וזו ההתייחסות לזווית השלישית).

6) $\Delta ADC \sim \Delta A'D'C'$ (לפי משפט דמיון ז.ז. ולפי 3, 4) .

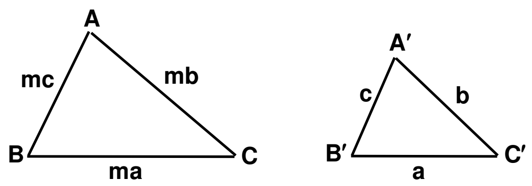
7) $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AC}{A'C'}$ (במשולשים דומים קיים יחס שווה בין הצלעות המתאימות - לפי 6).

8) מ.ש.ל.

ב. "הוכח שבמשולשים דומים יחס ההיקפים הוא כיחס שבין הצלעות המתאימות".

נתון: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

צ"ל: $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A'B'C'}} = \frac{BC}{B'C'}$



<u>הוכחה:</u>

1) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (נתון)

2) <u>נסמן:</u>
m - יחס הפרופורציה (הדמיון)
P - היקף משולש

3) $m = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ (במשולשים דומים קיים יחס שווה בין הצלעות המתאימות - לפי 1).

4) $P_{\Delta ABC} = BC + AC + AB$ (היקף משולש ABC).

5) $P_{\Delta A'B'C'} = B'C' + A'C' + A'B'$ (היקף משולש $A'B'C'$).

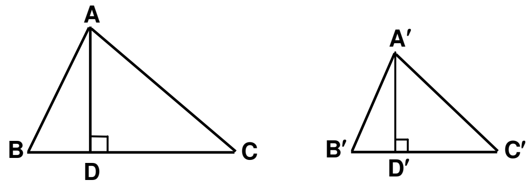
6) $P_{\Delta ABC} = ma + mb + mc = m(a + b + c) = m \cdot P_{\Delta A'B'C'}$ (לפי 3, 4, 5).

7) $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A'B'C'}} = m$ (לפי 6).

8) $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A'B'C'}} = m = \frac{BC}{B'C'}$ (לפי 3, 7).

9) מ.ש.ל.

ג. "הוכח שבמשולשים דומים יחס השטחים הוא כריבוע היחס שבין הצלעות המתאימות".



נתון: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

צ"ל: $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \left(\dfrac{BC}{B'C'}\right)^2$

<u>הוכחה:</u>

1) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (נתון)

2) <u>נסמן:</u>
m - יחס הפרופורציה
AD ו- A′D′ - גבהים (כבניית עזר).

3) $m = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{AB}{A'B'}$ (במשולשים דומים קיים יחס שווה בין הצלעות המתאימות - לפי 1).

4) $m = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AD}{A'D'}$ (במשולשים דומים יחס הגבהים הוא כיחס הצלעות המתאימות - לפי 1).

5) $S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{B'C' \cdot A'D'}{2}$ (שטח משולש $A'B'C'$).

6) לפי 3, 4, 5 נקבל:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{(m \cdot B'C')(m \cdot A'D')}{2} = \frac{m^2 (B'C' \cdot A'D')}{2} = m^2 \cdot S_{\Delta A'B'C'}$$

7) $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = m^2$ (לפי 6).

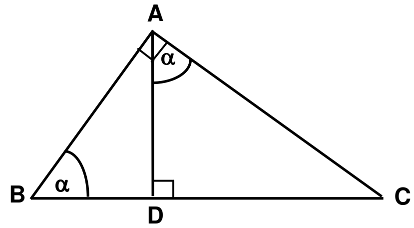
8) $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \left(\dfrac{BC}{B'C'}\right)^2$ (לפי 3 ו-7).

9) מ.ש.ל.

<u>פרופורציה במשולש ישר-זווית – משפטים</u>

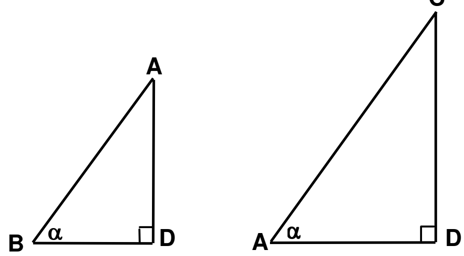
הוכחת המשפטים הבאים תעשה <u>בעזרת משפט דמיון ז.ז.</u> (ובעזרת פירוק המשולשים)

1. הגובה ליתר במשולש ישר-זווית מחלק את המשולש לשני משולשים דומים שכל אחד מהם דומה למשולש המקורי. (לכל שלושת המשולשים הקיימים יש זווית ישרה וזווית α)



2. הגובה ליתר במשולש ישר-זווית הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.

<u>"פירוק המשולשים"</u>

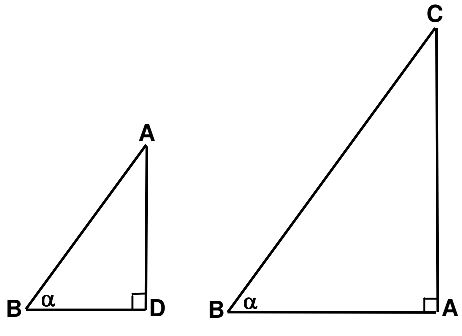


ולכן: $\frac{AD}{CD}=\frac{BD}{AD}$

$$\boxed{AD^2 = BD \cdot DC}$$

3. משפט הפוך למשפט 2:
אם הגובה לאחת הצלעות במשולש הוא הממוצע ההנדסי של היטלי שתי הצלעות האחרות, אז המשולש ישר-זווית.

4. ניצב במשולש ישר-זווית הוא הממוצע ההנדסי של היתר והיטלו של ניצב זה על היתר.



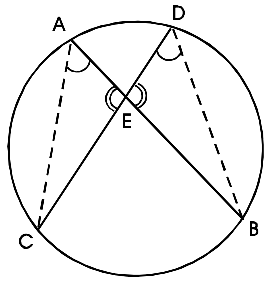
ולכן: $\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{AB}$

$$\boxed{AB^2 = BD \cdot BC}$$

<u>פרופורציה במעגל – משפטים</u>

קיימים שלושה משפטים בנושא זה ויש לדעת להוכיח משפטים אלה.
ההוכחה נעשית <u>באמצעות משפט דמיון ז.ז</u>. ובעזרת פירוק המשולשים (כאן מובאות התשובות הסופיות בלבד). בניות העזר להוכחת המשפטים משורטטות בקווקוו.

1. <u>שני מיתרים הנחתכים במעגל</u>



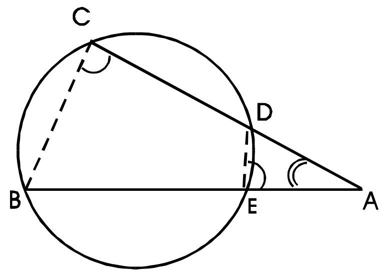
שני מיתרים הנחתכים במעגל, מחלקים זה את זה כך שמכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני.

הוכחת המשפט מסתמכת על זוויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות וזוויות קודקודיות שוות.

$\triangle DBE \sim \triangle ACE$ ולכן אחרי הפירוק: $\underline{AE \cdot EB = DE \cdot EC}$

הערה:
אם שני קטעים נחתכים ומכפלת חלקי הקטע האחד שווה למכפלת חלקי הקטע האחר, אז ניתן להעביר מעגל דרך ארבעת קצות שני הקטעים. (בנקודות C, B, D, A)

2. <u>שני חותכים למעגל</u>

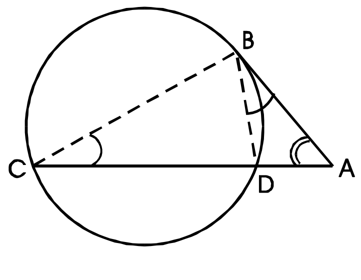


אם למעגל יוצאים שני חותכים מאותה נקודה אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

הוכחת המשפט מסתמכת על מרובע חסום במעגל.

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ולכן אחרי הפירוק: $\underline{AD \cdot AC = AE \cdot AB}$

3. <u>חותך ומשיק</u>
אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני זהו גודל קבוע ושווה לריבוע המשיק.
(התוצאה תהיה קבועה לכל החותכים היוצאים מנקודה A למעגל)



הוכחת המשפט מסתמכת על זווית בין משיק למיתר.
$\triangle ABD \sim \triangle ACB$ ולכן אחרי הפירוק: $\underline{AB^2 = AD \cdot AC}$

הערה:
מוצא החותך בנקודה מחוץ למעגל, והוא חייב לחתוך את המעגל בשתי נקודות.
במידה ויש קטע שאינו חותך את המעגל בשתי נקודות ניתן להאריך אותו כך שיהפוך לחותך.

<u>משל על משפטים ודמיון (ולא משפטי דמיון..)</u>

דמיינו לכם צייד שיוצא לציד לבוש ב"חליפת מגן" ועל גבו שק מלא חיצים.
הצייד רואה מטרה – המטרה נייחת (לזמן קצוב). הצייד בוחר את החץ הנכון והמתאים לפגיעה במטרה.
לפעמים, על-מנת ל"חסל" את המטרה עליו להשתמש בכמה חיצים בו-זמנית.

הצייד הוא כל אחד מכם, התלמידים,
חליפת המגן היא הידע שרכשתם במשך השנים,
החיצים שבשק הם המשפטים/הנימוקים בגיאומטריה,
והמטרה היא כל שאלה שאתם נדרשים לפתור.

ככל שתתרגלו את הפגיעה במטרות, כך יהיה לכם קל יותר לזהות ולמשוך מהשק את החצים/המשפטים המתאימים והפגיעה במטרות – פתרון השאלות - תהיה קלה יותר, מדוייקת יותר ומהירה יותר (יש לכם זמן קצוב לפתרון כל שאלה).

בהצלחה בציד ובבחינות!

סיכום בחשיבה הסתברותית בחיי יום-יום - שאלון 005

הסתברות: - הסיכוי שמאורע מסויים יקרה

טבלה דו-מימדית (לפי פרופורציה):

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

לפי השורות בטבלה מתקיים (מלמעלה למטה):

$$P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)$$
$$P(\overline{B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A \cap \overline{B})$$
$$1 = P(\overline{A}) + P(A)$$

לפי העמודות בטבלה מתקיים (מימין לשמאל):

$$P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)$$
$$P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})$$
$$P(B) + P(\overline{B}) = 1$$

בטבלה דו-מימדית לפי פרופורציה ניתן להשתמש בשברים או בשבר עשרוני אך לא מומלץ השימוש באחוזים.

ניתן לבנות טבלה דו-מימדית לפי שכיחויות, כאשר במקום P יופיע הסימן N, במקום 1 (שהוא $P(S) = 1$) יופיע $N(S)$ (מרחב המדגם).

בשכיחות מתקיים:

$$0 \le N(A) \le N(S)$$
$$N(\overline{A}) = N(S) - N(A)$$
$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

בפרופורציה מתקיים:

$$0 \le P(A) \le 1$$
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

<u>הסתברות מותנה</u>

1. מהי ההסתברות לקבל בזריקת קוביה את הספרה 2 ?
מרחב המדגם הוא $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ולכן הסיכוי הוא $\frac{1}{6}$.

2. מהי ההסתברות לקבל בזריקת קוביה את הספרה 2 <u>אם ידוע</u> שהמספר קטן מ- 5?
כעת מרחב המדגם הצטמצם ל- $\{1, 2, 3, 4\}$ ולכן הסיכוי הוא $\frac{1}{4}$.

לפיכך, ברגע שמשהו ידוע (כמו בדוגמא) מצטמצם מרחב המדגם לידוע בלבד ואת היתר (בדוגמא – הספרות 5 , 6) ניתן למחוק; כלומר, עוברים כעת לקבוצת ייחוס אחרת – חדשה.

קבוצת הייחוס החדשה כעת היא B. $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
(קבוצת הייחוס היא תמיד בצד ימין של ההתניה).

יש לשים לב שגם בהתניה יש משלים: $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$.

נוסחאת בייס: $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$
(ניתן לפתור תרגילים גם בלי להשתמש בה)

<u>איך מזהים שזו התניה ?</u> (A/B)
כאשר בשאלה יש את המילים:- "אם ידוע", "מבין", "מתוך", "בתנאי", "מ-", "בהינתן" (מילים אלו מכוונות לקבוצת הייחוס החדשה).

<u>איך מזהים שזה חיתוך?</u> $(A \cap B)$
כאשר בשאלה יש את המילים: - "וגם", "ו-".

<u>איך מזהים שזה איחוד?</u> $(A \cup B)$
כאשר בשאלה יש את המילה "או".

כאשר מבקשים תרגום מילולי לפרופורציה מסויימת מאד מומלץ להשתמש במילים המזהות שלעיל בהתאם לסוג הפרופורציה (פעולה הפוכה לשאלה "איך מזהים שזו התניה, חיתוך, איחוד?)
למשל כאשר מבקשים תרגום מילולי ל- $P(A/B)$ נשתמש במילים המזהות <u>התניה</u> כמו:
"...<u>מבין</u>...." , "...אם ידוע ש..."

<u>כאשר פותרים שאלה בחשיבה הסתברותית יש:-</u>

א. להגדיר בצורה מילולית את שתי הקבוצות/תכונות והמשלימים שלהן, כולל את מרחב המדגם (S):

S :- ....
A :- ....
$\overline{A}$:- ....
B :- ....
$\overline{B}$:- ....

וזאת גם אם בשאלה הגדירו כבר את הקבוצות/התכונות A ו- B (או באותיות אחרות).

אם A ו- B אינן מוגדרות בשאלה, על-מנת להקל עלינו לזהות מה הן מייצגות, מומלץ "לשלוף אדם" ממרחב המדגם ולשאול אותו שתי שאלות המתייחסות לנתוני השאלה.
(האם אתה שייך ל..., האם אתה בעד....).
"תשובותיו" ייתנו גם את $\overline{A}$ ו- $\overline{B}$.
לפעמים, מתוך סעיפי השאלה ניתן לזהות את הקבוצות השונות.

ב. לרשום את נתוני השאלה בצורה מתמטית (בפרופורציה ו/או בשכיחות).
למשל - $P(A)=0.7$, $P(A/B)=0.3$, $N(A)=25$.

ג. למלא את הטבלה בהתאם.
יש להראות את הדרך, כולל ההצבה בנוסחאות והחישובים המתאימים.
(אם רק ממלאים את הטבלה ולא מפרטים את הדרך זה עלול להיחשב <u>כ"חשד להעתקה"!)</u>

ד. לענות על הסעיפים השונים שבשאלה.
כאשר אתם משתמשים בנתון הלקוח מתוך הטבלה יש לרשום לידו <u>"לפי הטבלה"</u>.

<u>שימו לב!</u>
יש שאלות שבהן נתונות שתי התניות בלבד – בשאלות מסוג זה יהיה שימוש בנעלם או נעלמים.
לפעמים שימוש בנוסחא: $P(A/B)=1-P(\overline{A}/B)$ מצמצמת את הנעלמים.

כאשר שואלים לדוגמא:-
הראו בעזרת חישובים מתאימים למי יש סיכוי גדול יותר לקבל אחזקת פלאפון ("התכונה"), לגבר (קבוצה A) או לאישה (קבוצה $\overline{A}$) ?:

ההשוואה תמיד תהיה – אותה "תכונה" (אחזקת פלאפון) בקבוצות השונות (גבר, אישה):
P(אחזקת פלאפון/אישה) <u>לעומת</u> P(אחזקת פלאפון/גבר)

בצד שמאל של ההתניה תהיה "התכונה", בצד ימין של ההתניה תהיינה הקבוצות השונות.

<u>ניסוח התשובה יכול להיות באחת מהאפשרויות הבאות:</u>

א. אחוז / שיעור "התכונה" <u>מבין</u> קבוצה A (גדול/קטן/שווה) מאשר אחוז / שיעור "התכונה" <u>מבין</u> קבוצה $\bar{A}$.

ב. <u>מבין</u> קבוצה A אחוז / שיעור "התכונה" (גדול/קטן/שווה) מאשר <u>מבין</u> קבוצה $\bar{A}$.

ג. פרופורציית "התכונה" <u>מבין</u> קבוצה A (גדולה/קטנה/שווה) מאשר פרופורציית "התכונה" <u>מבין</u> קבוצה $\bar{A}$.

<u>שימו לב</u> לשימוש במילה הרלוונטית להתניה – "מבין".

<u>קשר סטטיסטי</u>

הקדמה:- בחיי היום-יום אנו מתעניינים לא אחת בשאלות מסוג:

א. האם יש קשר בין הכנת שיעורי בית לבין הצלחה בבחינות?
ב. האם יש קשר בין הצלחה במבחן הפסיכומטרי לבין הצלחה באוניברסיטה?
ג. האם יש קשר בין גובה האב לגובה הבן?

ניקח למשל את דוגמא ג' לעיל:
בדוגמא זו אנו שואלים בעצם האם אנו יכולים לנבא טוב יותר את גובה הבן כאשר ידוע גובה האב.
כלומר, שאלת הקשר ושאלת הניבוי כרוכות זו בזו ומכאן חשיבות הנושא גם בחיי היום-יום.

A קשור סטטיסטית ל- B אם מתקיים אחד מהתנאים הבאים:-

א. $P(A/B) \neq P(A)$
ב. $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$
ג. $P(A/B) \neq P(A/\bar{B})$

כלומר – אם זה <u>שונה</u> אז <u>יש</u> קשר סטטיסטי.

מתנאים א' ו-ב' ניתן להסיק <u>רק</u> האם יש או אין קשר סטטיסטי.
תנאי ג' נותן גם את משמעות הקשר – את כיוון הקשר (מי גדול יותר).

שים לב שתנאי ג' הוא בעצם "אותה תכונה בקבוצות השונות".

ניסוח אחר שאפשרי לגבי קשר סטטיסטי:- האם יש תלות? – כלומר האם יש קשר סטטיסטי.

<u>קשר סיבתי</u>

<u>הגדרות: -</u>

<u>קשר סיבתי:</u>
האם יש הסבר הגיוני (סיבה) לקשר הסטטיסטי בין שני גורמים.

<u>הצמדת גורמים:</u>
התופעה שבה יש לשני גורמים (A ו- B) קשר סטטיסטי עם גורם שלישי (C) ולכן נוצר, בדרך עקיפה, גם קשר סטטיסטי בין שני הגורמים.
הגורם השלישי נקרא <u>גורם מתווך</u>.

הערה:
כאשר יש הצמדת גורמים הקשר הסטטיסטי בין A ו- B הוא קשר <u>שלא עומד בזכות עצמו</u> אלא <u>תלוי</u> בגורם C .

<u>נטרול גורמים</u>:
הפעולה שנעשית כדי להתגבר על הצמדת גורמים.
מנטרלים את השפעתו של הגורם החשוד כגורם מתווך (C) על-ידי בדיקה האם קיים קשר סטטיסטי בין A ל- B בכל אחת מהקבוצות C ו- $\bar{C}$.

שאלה בנושא קשר סיבתי כוללת בדרך כלל מספר סעיפים (סדר הסעיפים יכול להשתנות משאלה לשאלה):

- **סעיף בו תקבלו נתונים (או תתבקשו למצוא נתונים) הנוגעים לקשר הסטטיסטי בין A ל – B .**
- **סעיף בו תועלנה טענות כלשהן לגבי השפעה אפשרית של גורם מתווך ותתבקשו להסביר כיצד הגיעו לטענות הנ"ל, ו/או לבדוק האם הטענות נכונות או לא.**
- **סעיף בו תתבקשו להסביר את הסתירה שהתקבלה (אם התקבלה) בין הקשר הסטטיסטי שהתקבל בין A ל- B לפני נטרול הגורם המתווך ובין הקשר הסטטיסטי שהתקבל בין A ל- B לאחר נטרול הגורם המתווך.**

בכל סעיף עליכם לרשום <u>מסקנה</u> הכוללת <u>תיאור מילולי</u> של הקשר הסטטיסטי בין הגורמים ומשמעותו (הכיוון שלו). בסוף השאלה עליכם להביא <u>סיכום</u> המסביר את התוצאות שהתקבלו תוך שימוש במושגים: "הצמדת גורמים" , "גורם מתווך" , "נטרול גורמים" , "קשר סיבתי" ואם רלוונטי, גם את המושג "היפוך הקשר" ("הפרדוקס של סימפסון") .
תיאור מילולי פירושו לתאר את הקשר הסטטיסטי תוך שימוש מדוייק בשם הקבוצה.

נבהיר את שלבי הפתרון ודרך כתיבת המסקנות בדוגמא כללית:

<u>שלבי הפתרון לשאלה בנושא קשר סיבתי</u>:

1. **בדיקת הקשר הסטטיסטי בין A ל- B ומשמעותו.**

לדוגמא: נניח שמצאתם בעזרת חישובים, או שנאמר לכם כי בין A ל- B קיים קשר סטטיסטי עם המשמעות: - $P(A/B) > P(A/\bar{B})$.

2. **מעלים טענה שקיים גורם C המשפיע על הקשר בין A ל- B.**
הינכם מתבקשים לבדוק האם הטענה נכונה וכיצד משפיע הגורם C על הקשר הסטטיסטי בין A ל- B:

א. נבדוק קודם כל שקיים קשר סטטיסטי בין A ל- C ובין B ל- C .

<u>שימו לב</u>!
תוצאות סעיף זה יכולות לשמש אתכם בהסבר התוצאות ובניסוח הסיכום.

ב. <u>בשלב זה עליכם לבצע נטרול גורמים</u> .

בדרך כלל בשלב נטרול הגורמים יהיה עליכם לעשות שימוש בשתי טבלאות המראות את הקשר בין A ל- B בקבוצה C ואת הקשר בין A ל- B בקבוצה $\bar{C}$.

3. **ניתוח התוצאות, מסקנות וסיכום:**

א. אם אחרי הנטרול נמצא <u>שאין קשר סטטיסטי</u> בין A ל- B בכל אחת מהקבוצות C ו- $\bar{C}$, <u>המסקנה</u> תהיה:
אין קשר סיבתי בין A ל- B.
C היה גורם מתווך שגרם להצמדת גורמים ויצר רושם כי קיים קשר סטטיסטי בין A ל- B .
<u>הסיכום יהיה</u>:
התברר כי אין קשר סטטיסטי בין A ל- B וגם אין קשר סיבתי ביניהם.
C הוא גורם מתווך שגרם להצמדת גורמים והוא שיצר את הרושם שיש קשר סטטיסטי בכיוון מסויים בין A ל- B.

ב. אם אחרי הנטרול נמצא <u>שיש קשר סטטיסטי</u> בין A ל-B <u>והקשר שומר על המשמעות</u> שהייתה לו לפני נטרול הגורמים (אי-השוויון עדיין גדול: $P(A/B) > P(A/\bar{B})$) ,
<u>המסקנה</u> תהיה:
יש קשר סיבתי בין A ל- B ואין שינוי במשמעות הקשר.
מכאן ש- C <u>לא</u> היה גורם מתווך (כלומר, C לא השפיע על הקשר בין A ל- B).

<u>הסיכום יהיה</u>:

התברר כי הקשר הסטטיסטי בין A ל- B נשמר גם לאחר הנטרול, כלומר <u>לכאורה</u> יש קשר סיבתי בין A ל- B והגורם C לא היה גורם מתווך ולכן לא שינה את משמעות הקשר, אך ייתכן <u>שיש גורמים מתווכים אחרים</u> (שאותם לא בדקנו).

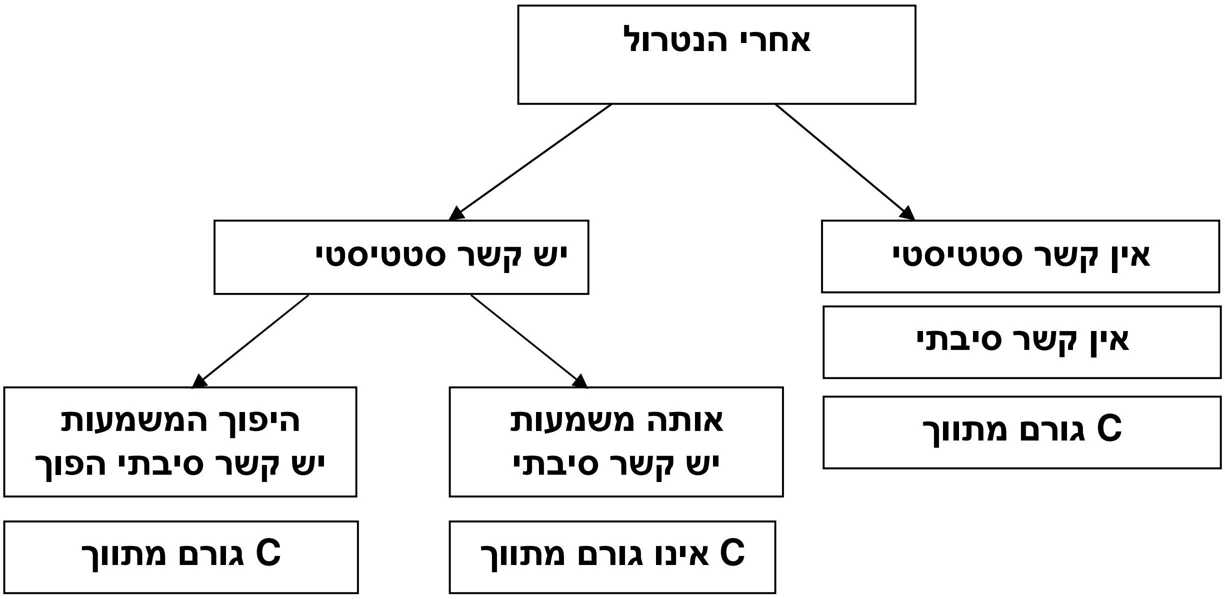
ג. אם אחרי הנטרול נמצא <u>שיש קשר סטטיסטי</u> בין A ל- B אך <u>עם משמעות הפוכה</u> (אי-השוויון התהפך: $(P(A/B) < P(A/\bar{B})$ <u>המסקנה</u> תהיה:
יש קשר סיבתי בין A ל- B אך בעקבות נטרול הגורמים חל <u>היפוך הקשר</u> הסטטיסטי (הפרדוקס של סימפסון). C הוא גורם מתווך שגרם להצמדת גורמים <u>ויצר את הרושם</u> של קשר סטטיסטי בכיוון מסויים בעוד שהקשר האמיתי היה בכיוון ההפוך.

<u>שימו לב</u>!
הכיוון האמיתי של הקשר הסטטיסטי בין A ל- B מתגלה אחרי נטרול הגורמים.

<u>הסיכום יהיה</u>:
הסיכום יכיל את המסקנה (ראה לעיל בסעיף זה) בתוספת הסבר כיצד הקשר הסטטיסטי בין A ל- C והקשר הסטטיסטי בין B ל- C (ראה סעיף 2 א') גרם ליצירת הרושם (המוטעה) שמצאנו לפני הנטרול.

מאד חשוב שבסיכום ייעשה שימוש במילים: **"קשר סיבתי" , "גורם מתווך", "הצמדת גורמים", "נטרול גורמים", "היפוך הקשר"**

לסיכום



על-מנת לזכור!:

מבחינת קשר סיבתי –

אם אחרי הנטרול יש עדיין קשר סטטיסטי (כלומר יש סימן של אי-שיוויון) אז יש קשר סיבתי.
אם אחרי הנטרול אין קשר סטטיסטי (כלומר יש סימן של שיוויון) אז אין קשר סיבתי.

מבחינת C הגורם המתווך -

אם אחרי הנטרול יש אותה משמעות (אי-השיוויון נשמר באותו כיוון) אז C אינו גורם מתווך.
בכל מקרה אחר - C גורם מתווך!

אם יש קשר סיבתי חייב להיות גם קשר סטטיסטי אבל לא להיפך! **(אם יש קשר סטטיסטי לא בהכרח יש קשר סיבתי)**

<u>שיפוט על-פי יציגות</u>

בחיי היום-יום אנו משתמשים במושגים מתורת ההסתברות, למשל: "אין סיכוי ש.." ,
אני בטוח ב-99% ש...."
במשפטים מסוג זה אנו מבטאים בעצם עד כמה אנחנו בטוחים שמשהו יקרה או לא יקרה,
או במילים אחרות – את רמת הביטחון שלנו להתרחשות מאורע בעתיד.

תורת ההסתברות מתאימה לכל מאורע ערך מספרי המבטא את מידת הסבירות (רמת הביטחון) לכך שהמאורע יתרחש.

יש שתי גישות עיקריות למציאת הסתברות:- הגישה הסטטיסטית (המתמטית) והגישה האינטואיטיבית (סובייקטיבית):

<u>הגישה הסטטיסטית (המתמטית):</u>
בגישה הסטטיסטית נחפש את השכיחות היחסית של המאורע וההסתברות תהיה הערך אליו מתקרבת השכיחות היחסית עבור מספר ניסיונות השואף לאינסוף.

לדוגמא: אם נשאל "מה הסיכוי שבזריקת קובייה יתקבל המספר 3?" נענה על פי הגישה המתמטית: כיוון שלכל מספר בקובייה יש סיכוי שווה להתקבל, הרי שאם נטיל את הקובייה מספר רב מאד של פעמים השכיחות היחסית של המספר 3 תתקרב מאד ל- $\frac{1}{6}$.

<u>הגישה האינטואיטיבית (סובייקטיבית):</u>
אנו ניתן סיכוי למאורע להתרחש על-פי מידת האמונה שלנו (רמת הבטחון) בהתרחשותו, כלומר – על פי השיפוט האינטואיטיבי שלנו.
שיפוט אינטואיטיבי הוא בעצם שיפוט סובייקטיבי ולכן לאנשים שונים תהיינה הסתברויות אינטואיטיביות שונות לאותו אירוע.

לדוגמא:
אם נשאל מהו הסיכוי שחיסון חדש ימגר מחלה מסוימת נקבל תשובות שונות מאנשים שונים. רופאים וודאי יתנו סיכוי גבוה יותר לחיסון, אנשים מהשורה יתנו סיכויים שונים בהתאם לאמון שהם רוחשים לרופאים ובהתאם לניסיונם האישי.....

דוגמא להבדל בתוצאה כאשר משתמשים בשתי הגישות השונות:

ידוע כי אחוז ההצלחה בקורס מסוים עומד על 75%. מה ההסתברות שמיכל, סטודנטית בקורס, תסיים את הקורס בהצלחה?
אם המשיב הוא אדם אקראי, סביר להניח שהוא יאמר שההסתברות להצלחתה של מיכל היא 75%, אך אם המשיבה היא חברתה של מיכל המכירה את יכולותיה הטובות , סביר להניח שתשובתה תהיה גבוהה יותר למשל – 90%.

המשיב האקראי הסתמך על הנתון היחיד שהיה לו (אחוז ההצלחה הידוע) ואילו חברתה של מיכל השתמשה בגישה הסובייקטיבית והוסיפה לנתון המתמטי את מידת האמון שלה ביכולותיה של מיכל.

גורמים פסיכולוגיים משפיעים על החלטותינו כמעט בכל תחום בחיינו ("הפסיכולוגיה של הכלכלה") – שכל לעומת רגש.
למשל, אוהד כדורגל "שרוף" יתערב עם חברו על ניצחון קבוצתו גם אם היא במקום האחרון בטבלה ומשחקת נגד הראשונה בטבלה....

כלומר, כאשר משתמשים בגישה האינטואיטיבית/סובייקטיבית אנו מפעילים "מנגנונים" שונים כמו "תחושות בטן", רגשות, מידע סובייקטיבי - שיכולים לגרום לנו לטעויות בשיפוט. טעויות מסוג זה נקראות: "כשלים בשיפוט אינטואיטיבי".

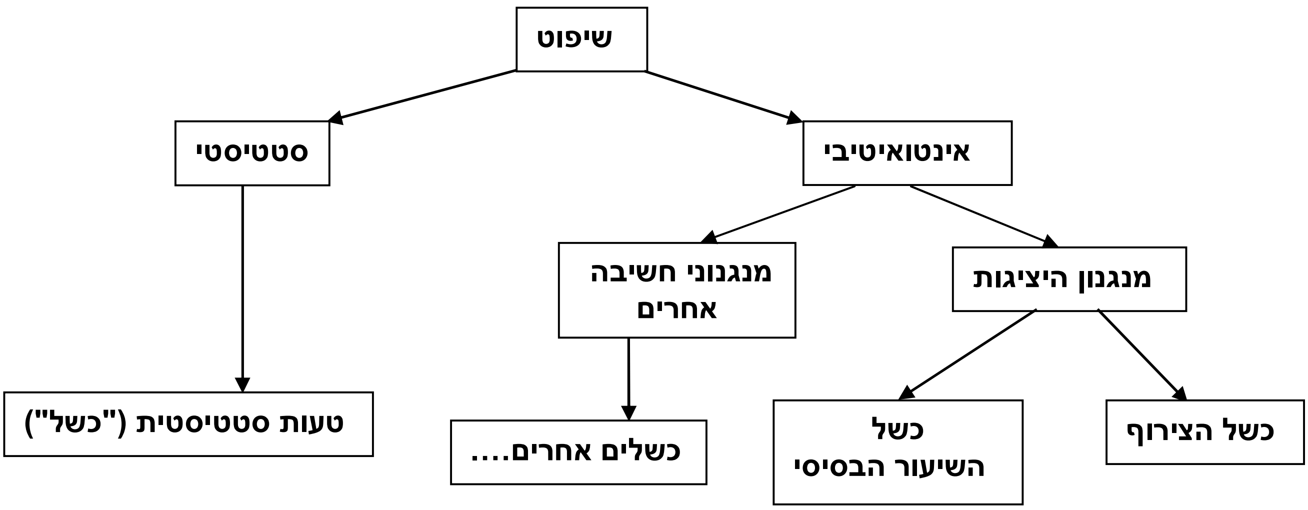
אחד המנגנונים המשפיעים על השיפוט האינטואיטיבי שלנו נקרא: מנגנון היציגות.

מנגנון היציגות

לפעמים, כאשר נתונים לנו שני מאורעות, אחד מהם יראה לנו "הגיוני" יותר, סביר יותר שיקרה ולכן נייחס לו הסתברות גבוהה יותר להתרחשות מאשר למאורע השני. במילים אחרות – מאורע אחד ייצג טוב יותר בעינינו את מה שיכול לקרות.
תהליך החשיבה הנ"ל נקרא "מנגנון היציגות".

שימו לב!
המוח שלנו מחפש את כל מה שנראה לנו הגיוני יותר והוא יבחר במשהו ייצוגי יותר על-פי ידע קודם, תחושות בטן, רגשות וכד', מבלי להתחשב תמיד במה שנכון מתמטית!
יוצא, שפעמים רבות אנחנו נוטים "להיתפס לתיאור" בלי להתייחס לכל הנתונים.

יש שני סוגים של כשלים (טעויות) שעלולים לקרות בגלל מנגנון היציגות: "כשל הצירוף" ו"כשל השיעור הבסיסי".



<u>כשל הצירוף</u>

נתייחס לדוגמא הבאה:
בני הוא עורך דין מצליח וידוע כחובב ריקודים מושבע.
איזה מהמשפטים הבאים נראה מייצג יותר את בני?

א. בני הוא עורך-דין המתמחה בדיני חברות גדולות.
ב. בני הוא עורך דין המתמחה בדיני חברות גדולות ומשתתף בחוג ריקודים פעמיים בשבוע.

רבים מאיתנו יאמרו כי משפט ב' הוא הסביר יותר וזאת מכיוון שלאור האינפורמציה המקדימה שקיבלנו על בני, <u>נראה לנו הגיוני יותר</u> שמשפט ב' <u>מייצג</u> את בני טוב יותר ממשפט א'. אנחנו "נתפסים לתיאור" המקדים של בני – כלומר מתבססים על <u>מנגנון היציגות</u> ולכן טועים בתשובה!!!

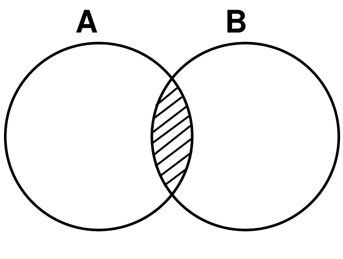
אם נבדוק את הדוגמא בצורה מתמטית, נגלה כי משפט א' הוא הסביר יותר משום <u>שלאפשרות יחידה תהיה תמיד הסתברות גבוהה יותר מאשר לצירוף שתי אפשרויות - זהו "כלל הצירוף"</u>.

תשובה ב' <u>נוגדת</u> בעצם את כלל הצירוף ולכן אינה נכונה.

<u>נסביר:</u>

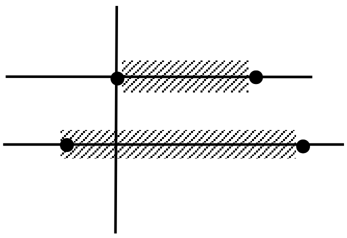
נסמן: A - קבוצת עורכי הדין המתמחים בדיני חברות גדולות.
B - קבוצת המשתתפים בחוג ריקודים פעמיים בשבוע.

<u>נראה את כלל הצירוף בדרך גרפית:</u>

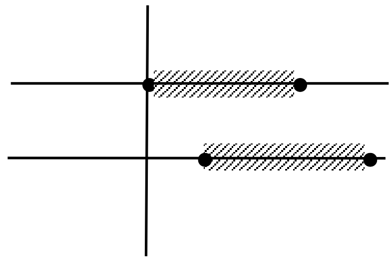


מהשרטוט ברור כי $P(A \cap B) < P(A)$.
אם ניתן הסתברות גבוהה יותר למשפט ב' יהיה פירוש הדבר כי: $P(A \cap B) \geq P(A)$ וזה נוגד את כלל הצירוף.

ובדרך אלגברית (כמו באי-שיוויונים):



$$P(A \cap B) = P(A)$$



$$P(A \cap B) < P(A)$$

מחוקי הפרופורציה וחיתוך (צירוף) מאורעות: $\boxed{P(A \cap B) \le P(A)}$

וגם בדרך זו ניתן לראות כי אם ניתן הסתברות גבוהה יותר למשפט ב' יהיה פירוש הדבר: $P(A \cap B) \ge P(A)$ **וזה נוגד את כלל הצירוף.**

לסיכום:
כשל הצירוף קורה כאשר השיפוט שאנו עושים מתבסס על מנגנון היציגות ומעניק לצירוף של שתי אפשרויות הסתברות גבוהה יותר מאשר לאפשרות יחידה– וזה נוגד את כלל הצירוף.

כשל השיעור הבסיסי

על מנת להבין מהו כשל השיעור הבסיסי עלינו להגדיר מספר מושגים חדשים:

1. **השיעור הבסיסי של A:** $\frac{P(A)}{P(\bar{A})}$

השיעור הבסיסי של A מוגדר כיחס בין הפרופורציה של A לבין הפרופורציה של המשלים של A שהוא $\bar{A}$.

2. **דיאגנוסטיות של B:** $\frac{P(B/A)}{P(B/\bar{A})}$

דיאגנוסטיות פירושה – יכולת אבחון.

הדיאגנוסטיות של התכונה B מוגדרת כיחס בין פרופורציית בעלי תכונה B מבין קבוצה A לבין פרופורציית בעלי תכונה B מבין קבוצה $\bar{A}$.
במילים אחרות, אנו בודקים עד כמה התכונה B מאבחנת את הקבוצה A.

<u>נסביר:</u>

כאשר השוונו בין שתי הסתברויות אמרנו "אותה תכונה בקבוצות השונות".
כאשר בדקנו קשר סטטיסטי בדקנו האם: $P(B/A) \neq P(B/\bar{A})$
(להזכירכם – התכונה תמיד תופיע מצד שמאל של ההתניה..).
במידה ש: $P(B/A) = P(B/\bar{A})$ פירוש הדבר שאין קשר סטטיסטי.

<u>שימו לב!</u>
ההגדרה של דיאגנוסטיות היא בעצם חילוק של שני האגפים זה בזה, אגף שמאל באגף ימין.

אם מתקיים $1 = \frac{P(B/A)}{P(B/\bar{A})}$ אז: $P(B/A) = P(B/\bar{A})$, כלומר – אין קשר סטטיסטי.

או במילים אחרות – התכונה B אינה מאבחנת כלל את קבוצה A.

ככל שהדיאגנוסטיות גדולה מ-1 אז פרופורציית תכונה B בקבוצה A גדולה מפרופורציית תכונה B בקבוצה $\bar{A}$:

$$1 > \frac{P(B/A)}{P(B/\bar{A})} \quad \text{אז:} \quad P(B/A) > P(B/\bar{A})$$

ולהיפך: ככל שהדיאגנוסטיות קטנה מ-1 אז פרופורציית תכונה B בקבוצה A קטנה מפרופורציית תכונה B בקבוצה $\bar{A}$:

$$1 < \frac{P(B/A)}{P(B/\bar{A})} \quad \text{אז:} \quad P(B/A) < P(B/\bar{A})$$

3. **<u>היחס המעודכן:</u>** $R = \frac{P(A/B)}{P(\bar{A}/B)}$

מוגדר כיחס בין פרופורציית תכונה A מתוך קבוצה B לבין פרופורציית חסרי תכונה A (המשלים של A שהוא $\bar{A}$) מתוך קבוצה B.

<u>שימו לב!</u>
בעצם R הוא יחס של שני חיתוכים:

$$R = \frac{P(A/B)}{P(\bar{A}/B)} = \frac{\frac{P(A \cap B)}{P(B)}}{\frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(\bar{A} \cap B)}$$

ולכן כאשר הטבלה מוכנה, ניתן למצוא את R בצורה מיידית.

כזכור, בנוסחת התניה מתקיים:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad , \qquad P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

מכאן: $P(A/B)\cdot P(B)=P(B/A)\cdot P(A)$ (נוסחת בייס)

ולכן: $P(\bar{A}/B)\cdot P(B)=P(B/\bar{A})\cdot P(\bar{A})$ (החלפנו את A במשלים שלו $\bar{A}$).

נחלק את שתי המשוואות זו בזו ונקבל:

$$\frac{P(A/B)}{P(\bar{A}/B)}=\frac{P(B/A)}{P(B/\bar{A})}\cdot\frac{P(A)}{P(\bar{A})}$$

כלומר:

$$R=\frac{P(A/B)}{P(\bar{A}/B)}=\frac{P(B/A)}{P(B/\bar{A})}\cdot\frac{P(A)}{P(\bar{A})}$$

היחס המעודכן R | דיאגנוסטיות של B | השיעור הבסיסי של A

כעת נפתח נוסחה שתאפשר לנו למצוא את היחס $P(A/B)$ כשנתון לנו היחס המעודכן R:

$$R=\frac{P(A/B)}{P(\bar{A}/B)}=\frac{P(A/B)}{1-P(A/B)}$$

$$R[1-P(A/B)]=P(A/B)$$

$$R=P(A/B)\cdot[1+R]$$

$$\boxed{P(A/B)=\frac{R}{1+R}}$$

הערות:

א. היות ולא פיתחנו נוסחא חדשה, אלא נעזרנו בכל הנוסחאות שלמדנו קודם, ניתן לפתור את רוב התרגילים בעזרת טבלה דו-מימדית ובלי R.
במקרה כזה ייתכן (אבל לא תמיד) שעל מנת לבנות את הטבלה הדו-מימדית נאלץ להשתמש בנעלמים ותהיה לנו עבודה יותר "שחורה".
ולפיכך, כשלא מבקשים מכם במפורש לפתור באמצעות טבלה, עדיף לפתור באמצעות R.

ב. בדרך-כלל נדרש לחשב את $P(A/B)$. (ראה שאלות אפשריות בהמשך).

ג. היתרון בנוסחא $\frac{P(A/B)}{P(\bar{A}/B)} = \frac{P(B/A)}{P(B/\bar{A})} \cdot \frac{P(A)}{P(\bar{A})}$ שהפרופורציה $P(B)$ אינה מופיעה בה ולכן גם אם איננה ידועה אפשר לחשב את $P(A/B)$.

דוגמא מספרית להכרת המושגים:

A ו- B הן קבוצות חלקיות של קבוצה כוללת S.

נתון:

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

$$P(B/A) = \frac{2}{3}$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{3}{4}$$

א. חשב את השיעור הבסיסי של A: -

$$P(A) = \frac{3}{5} \quad \text{(נתון)}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{3/5}{2/5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$ השיעור הבסיסי של A

ב. חשב את הדיאגנוסטיות של B: -

$$\frac{P(B/A)}{P(B/\bar{A})} = \frac{2/3}{3/4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

ג. חשב את היחס המעודכן R: -

$$R = \frac{P(B/A)}{P(B/\bar{A})} \cdot \frac{P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$$

ד. חשב את $P(A/B)$: -

$$P(A/B) = \frac{R}{1+R} = \frac{4/3}{1+4/3} = \frac{4}{3+4} = \frac{4}{7}$$

ה. חשב את $P(B)$ בעזרת נוסחת בייס: -

$$P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

$$\frac{4}{7} \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$$

$$\frac{4}{7} \cdot P(B) = \frac{2}{5}$$

$$P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{10}$$

ו. בנה טבלה דו-מימדית והשווה בין התשובות: -

$$P(B/A) = \frac{2}{3} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{3/5}$$

$$P(B \cap A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{3}{4} = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B \cap \bar{A})}{2/5}$$

$$P(B \cap \bar{A}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$$

	$\bar{A}$	A	
$7/10$	$3/10$	$2/5$	B
$3/10$	$1/10$	$1/5$	$\bar{B}$
1	$2/5$	$3/5$	

בהתאם לנתוני השאלה והחישובים הנ"ל נבנה את הטבלה (נתוני השאלה והחישובים מסומנים בטבלה ב"עיגול").

לפי תוצאות הטבלה: -

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2/5}{7/10}=\frac{4}{7}$$

התוצאה יצאה שווה לתוצאה שחושבה ללא הטבלה (כצפוי).

<u>נחזור לשיפוט על-פי יציגות ולכשל הנקרא "כשל השיעור הבסיסי".</u>

נביא דוגמא להמחשה בלבד:

בבית ספר תיכון 20% מהתלמידים לומדים מתמטיקה ברמה של 5 יח"ל והשאר ברמות אחרות. בבדיקת תוצאות בחינת הבגרות האחרונה במתמטיקה הסתבר כי 88% מתלמידי 5 יח"ל הצליחו בבחינה בעוד שרק 40% מתלמידי הרמות האחרות הצליחו בבחינה. כתב של עיתון ביה"ס בחר לראיין אחד מהתלמידים שהצליח בבחינה. מה ההסתברות שהתלמיד שרואיין לומד ברמה של 5 יח"ל?

במבט ראשון, נראה כי מכיוון שאומרים לנו שהתלמיד המרואיין הצליח בבחינה, יש סיכוי של 88% שהוא לומד ברמה של 5 יח"ל. <u>רובנו</u> נתייחס לתכונה "הצליח במבחן" כמתאימה יותר, ומייצגת יותר תלמיד ברמה של 5 יח"ל <u>ונטעה</u> בתשובה. אנו משתמשים כאן <u>במנגנון היציגות</u> <u>ומתעלמים מנתון סטטיסטי חשוב</u> שהוא: רק 20% מכלל התלמידים לומדים ברמה של 5 יח"ל.
כלומר, רק חלק קטן יחסית מהתלמידים לומדים ברמה של 5 יח"ל וזה מוריד את הסיכוי שהתלמיד המרואיין יהיה ברמה זו.
הנתון ממנו התעלמנו הוא <u>השיעור הבסיסי</u> – היחס בין מספר תלמידי 5 יח"ל (קבוצה A) לבין מספר התלמידים ברמות האחרות (קבוצה $\bar{A}$).
ההתעלמות מהשיעור הבסיסי הובילה אותנו לטעות בהערכת ההסתברות ולכן קוראים לטעות מעין זו <u>"כשל השיעור הבסיסי".</u>

נפתור את אותה שאלה בדרך סטטיסטית נכונה, תוך התייחסות לשיעור הבסיסי.

<u>נסמן</u>: A - קבוצת התלמידים הלומדים ברמה של 5 יח"ל.
B - קבוצת התלמידים שהצליחו בבגרות במתמטיקה.

<u>נסמן גם את המשלימים שלהם</u>:
$\bar{A}$ - קבוצת התלמידים הלומדים ברמות אחרות.
$\bar{B}$ - קבוצת התלמידים שלא הצליחו בבגרות במתמטיקה.

<u>נתון</u>:
$$P(A) = 0.20$$
$$P(B/A) = 0.88$$
$$P(B/\bar{A}) = 0.40$$

בשאלה אנו נדרשים בעצם למצוא את $P(A/B)$ (ידוע שהתלמיד הצליח בבגרות).

הנוסחה אומרת:
$$\boxed{P(A/B) = \frac{R}{1+R}}$$

אנו יודעים כי:
$$R = \frac{P(A/B)}{P(\bar{A}/B)} = \frac{P(B/A)}{P(B/\bar{A})} \cdot \frac{P(A)}{P(\bar{A})}$$

השיעור הבסיסי של A

דיאגנוסטיות של B

היחס המעודכן R

נציב את הנתונים:
$$R = \frac{0.88}{0.40} \cdot \frac{0.20}{0.80} = 2.20 \cdot 0.25 = 0.55$$

ומכאן:
$$P(A/B) = \frac{0.55}{1+0.55} \cong 0.35$$

כלומר, התשובה הנכונה היא שההסתברות שהתלמיד המרואיין לומד ברמה של 5 יח"ל היא 35% בערך ולא 88%.

<u>לסיכום:</u>
כשל השיעור הבסיסי קורה כאשר השיפוט שאנו עושים מתבסס על מנגנון היציגות ולכן אנו נוטים לייחס הסתברות לתכונה המתוארת תוך התעלמות מהשיעור הבסיסי של אותה תכונה. ההתעלמות מהשיעור הבסיסי גורמת לטעות בתשובה.
התעלמות מהשיעור הבסיסי מאפיינת "נשאל נאיבי" – כלומר כל אדם שאינו מצוי ברזי החשיבה ההסתברותית...

שאלות אפשריות בשיפוט על-פי יציגות

1. נותנים לנו אינפורמציה מקדימה על אדם ואתם נשאלים איזה משפט מייצג יותר את האדם. בדרך כלל תקבלו משפט עם אפשרות אחת ומשפט הכולל שתי אפשרויות. זוהי שאלה שמאפיינת שאלה הנוגעת ל"כשל הצירוף".

   אם תתבקשו להסביר את הטעות, אחד הניסוחים האפשריים של ההסבר יכול להיות:

   בשיפוט על-פי יציגות נוטים לתת הסתברות גבוהה יותר למשפט הכולל שתי אפשרויות מאשר למשפט הכולל אפשרות אחת וזה בגלל ששתי האפשרויות נתפסות כמייצגות יותר. זה נוגד את כלל הצירוף.

2. מבקשים למצוא מנתוני השאלה בעזרת חישוב את השיעור הבסיסי, הדיאגנוסטיות והיחס המעודכן ודרכם את $P(A/B)$.
   אחד הסעיפים של שאלה מסוג זה יכול לבקש תשובה לשאלה:
   כיצד היו עונים על השאלה "נשאלים נאיביים", "אנשים שלא למדו חשיבה הסתברותית" או "רוב האנשים" וכיצד קוראים לתופעה זו ו/או מאיזה נתון מתעלמים אנשים אלה?
   זוהי שאלה הנוגעת ל"כשל השיעור הבסיסי".

   אחד הניסוחים האפשריים של תשובה לשאלה מסוג זה יכול להיות:

   "נשאלים נאיביים / אנשים שלא למדו.../רוב האנשים.. מתעלמים מהשיעור הבסיסי (כי הם שופטים לפי מנגנון היציגות) ולכן מקבלים תשובה מוטעית. לתופעה זו קוראים "כשל השיעור הבסיסי"....

כאשר בשאלה השיעור הבסיסי <u>אינו נתון כלל</u>, ואתם נשאלים "מה הטעות האפשרית?" ניסוח התשובה יכול להיות: "מכיוון שהשיעור הבסיסי אינו נתון סביר להניח שמדובר בטעות מסוג "כשל השיעור הבסיסי".

<u>שימו לב!</u> מאד חשוב להשתמש בתשובה במילים הרלוונטיות - "השיעור הבסיסי" , כאשר מתעלמים מהשיעור הבסיסי מתקבלת תשובה מוטעית וזהו "כשל השיעור הבסיסי".

3. שאלות "הפוכות":
   כאשר נתונים $P(A/B)$ והדיאגנוסטיות ויש למצוא את $P(A)$.
   הדרך לפתרון תהיה:
   ידוע ש:- $P(A/B)=\frac{R}{1+R}$
   מנוסחה זו ניתן למצוא את R ולאחר שמצאנו את R ומהנתון של הדיאגנוסטיות ניתן למצוא את השיעור הבסיסי שהוא: $\frac{P(A)}{P(\bar{A})}=\frac{P(A)}{1-P(A)}$
   מכאן נמצא את $P(A)$ (ואת $P(\bar{A})$, אם יש צורך בכך).

4. שאלות בהן נתונים הדיאגנוסטיות והשיעור הבסיסי ויש למצוא את $P(A/B)$.

<u>שימו לב!</u> את הנתון של הדיאגנוסטיות אנו מסיקים מדרך הניסוח למשל:
"פרופורציית "התכונה" מבין "הקבוצה" גדולה פי x , או קטנה פי y מפרופורציית "התכונה" ב"קבוצה המשלימה".

הדיאגנוסטיות תהיה בעצם היחס הנתון : x או $\frac{1}{y}$ בהתאמה.

מהנתונים ניתן למצוא את R ולאחר מכן את $P(A/B)$.

5. <u>שאלות ניבוי</u>:

בשאלה מובאת אינפורמציה לגבי יכולתם של אדם, חיה, מכונה, מבחן וכד' לצפות מראש (לנבא) התרחשות של אירוע מסויים.

דוגמאות:
מבחני כניסה שמנבאים הצלחה בלימודים / קורס וכד'...
כלבים מאומנים שמסתובבים בשדות תעופה ושמנבאים מי נושא סמים...
גרפולוגים שמנבאים אמינות של מועמדים... / הצלחה בתפקיד...
רופאים שמנבאים הצלחה בניתוחים...
בדיקות שמנבאות סיכוי לחלות במחלה כלשהי...

שימו לב! לצורך ההסבר על הסוגים השונים של שאלות הניבוי נשתמש בדוגמא של "נביא" שמנבא סיום קורס (באותה מידה יכולנו לבחור בכלב שמנבא למי יש סמים וכו').

<u>סוגי שאלות ניבוי</u>:

א. יש שאלות בהן נתונים אחוזי ההצלחה והכשלון של ה"נביא" לנבא אירוע מסויים, למשל:
נתון כי 95% מהנבחנים שסיימו את הקורס הנביא אכן אמר שהם יסיימו. (כלומר הוא מצליח בניבוי ב-95% מהמקרים).
כמו כן נתון כי 10% מהמועמדים שלא סיימו את הקורס הנביא אמר עליהם שהם כן יסיימו אותו. (כלומר הוא נכשל בניבוי ב- 10% מהמקרים).

נגדיר:
A - קבוצת מסיימי הקורס.
B - הקבוצה ש"הנביא" אמר שיסיימו את הקורס.

ולכן הנתונים הם:

$$P(B/A)=0.95$$
$$P(B/\overline{A})=0.10$$

ב. יש שאלות שיגידו לנו ש"הנביא" צודק ב- 85% מהמקרים - זה אומר:
85% מהמועמדים שסיימו את הקורס הנביא אכן אמר שהם יסיימו ובאותה מידה -
85% מהמועמדים שלא סיימו את הקורס הנביא אכן אמר שלא יסיימו את הקורס.

ולכן הנתונים הם:

$$P\left(B/A\right)=0.85$$
$$P\left(\overline{B}/\overline{A}\right)=0.85$$

בשאלות מסוג א' ו- ב' מופיע לעיתים קרובות סעיף שמניסוחו ניתן להבין כי המועמד הוא מהקבוצה שהנביא ניבא שיסיים את הקורס (B) ושואלים מהי ההסתברות שהמועמד אכן סיים את הקורס (A).

בשאלה כזו בעצם אתם מתבקשים למצוא את $P\left(A/B\right)$:
P(קבוצת מסיימי הקורס A / הקבוצה שהנביא ניבא שיסיימו את הקורס B)

<u>הערה כללית</u>

לפעמים מדרך ניסוח השאלה ניתן להסיק באיזה סוג שאלה מדובר:

כאשר בשאלה מצויין "אין צורך בחישובים" ניתן להסיק שהכוונה היא ל"נשאל נאיבי" שלא למד הסתברות והתשובה נמצאת בעצם בנתונים.

כמו כן יש רמז בשאלה על טעות אפשרית, דהיינו אחד מה"כשלים" האפשריים.

אנו יודעים שנשאל נאיבי יכול להכשל או ב"כשל הצירוף" או ב"כשל השיעור הבסיסי".

אם בשאלה מובאים תיאורים ומשווים בין סיכוי של אפשרות אחת לעומת צירוף אפשרויות – מדובר ב"כשל הצירוף".

אם בשאלה מובאות פרופורציות של קבוצות שונות סביר להניח שמדובר בשאלה הקשורה ב"כשל השיעור הבסיסי".

כעת אתם יכולים וצריכים לדרוש מעצמכם יותר

בהצלחה!!!