<u>סיכום - חקירת פונקציות – שאלון 806</u>

1. **לא לשכוח לציין את תחום ההגדרה של הפונקציה – גם אם לא מבקשים!**
2. **נא ציירו את הטבלה "מבחן הנגזרת הראשונה" לכל רוחב הדף – אין סיבה להצטמצם.**
3. **בטבלה יש להכניס את הנקודות החשודות ואת תחום ההגדרה.**
   <u>לא לשכוח את נקודות הקיצון בקצוות.</u>
4. **זכרו! את ההצבות יש לעשות <u>בנגזרת הראשונה האמיתית והנכונה</u>.**
5. **גזירת הפונקציה חייבת להיות נכונה – עלולים לפסול לכם את כל השאלה במקרה שהגזירה אינה נכונה!**
6. **אין להציב בנגזרת השנייה נקודות קצה.**
7. **כל מה שסותר את תחום ההגדרה – נפסל.**
8. **למציאת אסימפטוטה אנכית יש להראות את ההצבות במונה של הפונקציה.**
   "נציב $x = x_0$ במונה ונקבל לדוגמא 5, לא איפס את המונה ולכן $x = x_0$ אסימפטוטה אנכית". במידה והמונה מתאפס, יש לצמצם את הפונקציה ולבדוק את <u>איפוס המכנה</u>, ("למטה, למעלה, למטה").
9. **<u>לא כל תחום הגדרה הופך בצורה אוטומטית לאסימפטוטה אנכית. ייתכן שיש שם "חור".</u>**
   (שימו לב! שמו המתמטי של "חור" הוא "נקודת אי רציפות סליקה").
10. **חובה לבדוק בעזרת גבולות - ליד כל "קיר מבטון מזוין" איך הפונקציה מתקרבת לקיר.**
    ככל שמתקרבים לקיר והערך המוחלט של ה- y גדל – זוהי אסימפטוטה אנכית.
    במידה ומתקרבים לקיר והערך המוחלט של ה- y מתכנס (קטן) – זהו "חור".
11. **על מנת למצוא את ערך הפונקציה בנקודת ה"חור" שלה, יש לצמצם את הפונקציה ורק לאחר מכן להציב את ערך ה- x בפונקציה המצומצמת.**
12. **יש לזכור שגם בחקירת פונקציה טריגונומטרית – יכול להיות גם "חור".**
13. **כאשר מקבלים פונקציה שניתן לצמצם אותה לפני תחילת החקירה ועל-ידי כך להקל על החקירה, אתם יכולים לצמצם , <u>אבל</u> יש לזכור שמה שקובע להמשך החקירה היא הפונקציה המקורית, ותחום ההגדרה של הפונקציה המקורית.**
    בטבלה יש להכניס את תחום ההגדרה המקורי.
    לא לשכוח בסוף החקירה להוסיף את "החור" על גרף הפונקציה (אם קיים).
14. **<u>בפונקציה רציונאלית</u>, במציאת אסימפטוטה אופקית, יש להתייחס לחזקות של המונה והמכנה. בפונקציה רציונאלית מה שקורה באין-סוף קורה גם במינוס אין-סוף.**
    בכל מקרה וליתר בטחון, ניתן להציב מספרים גדולים (או קטנים) ולראות שאכן צדקתם במציאת האסימפטוטה האופקית.

15. <u>בפונקציה עם שורש</u> יש לבדוק לחוד מה קורה באין-סוף ומה קורה במינוס אין-סוף.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) =$$

16. למציאת האסימפטוטה האופקית, בפונקציה עם שורש, ניתן לעשות זאת בדרך מתמטית או בעזרת הצבת מספרים.

לדוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-8}}$. מצא את האסימפטוטות האופקיות.

במספרים גדולים המספר 8–, זניח ולכן:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-8}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|} = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-8}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{|x|} = -1$$

מציאת האסימפטוטות האופקיות בעזרת הצבת מספרים:

עבור המספרים הגדולים:

$$\begin{array}{lcl} x=10 & & 1.04257 \\ x=100 & \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-8}} = & 1.0004 \\ x=1000 & & 1.000004 \end{array}$$

עבור המספרים הקטנים:

$$\begin{array}{lcl} x=-10 & & -1.04257 \\ x=-100 & \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-8}} = & -1.0004 \\ x=-1000 & & -1.000004 \end{array}$$

17. בנגזרת הראשונה יש להשתדל לא להגיע לחזקות גבוהות (כי לא תוכלו לפתור את המשוואה), לכן מומלץ להוציא גורמים משותפים לפני פתיחת סוגריים וביצוע ההכפלות.

18. כאשר יש שימוש ב – (מונה y') יש להוסיף הסבר מדוע מותר לעשות זאת:

"המכנה חיובי ולכן מותר לגזור רק את המונה". לכן מומלץ לדאוג שהמכנה יהיה חיובי (בחזקה זוגית ולא אי-זוגית).

19. כאשר מעלים משוואה בריבוע יש לבדוק שלא הוכנסו פתרונות זרים. פתרונות זרים יש לפסול.

20. כאשר נתונה פונקציה בצורה של פולינום חלקי פולינום (המכנה ממעלה ראשונה), ויש לבצע חילוק ארוך, וזאת על-מנת לפשט את הפונקציה הנתונה.
בחילוק ארוך יש להקפיד על חזקות יורדות של המחלק והמחולק.
כאשר מבצעים חילוק יש לחלק את "הראשון עם הראשון".
יש להקפיד שאחרי ההחסרה עדיין החזקות יורדות, במידה ולא, יש לסדר לפני החילוק.
לדוגמא:

$$\begin{array}{l}
\underline{x^3-2x^2+4x-5} \\
x^4+x^3-2x^2+7x-15 \,\big|\,(x+3) \\
\underline{x^4+3x^3} \\
\quad -2x^3-2x^2+7x-15 \\
\quad \underline{-2x^3-6x^2} \\
\qquad\quad 4x^2+7x-15 \\
\qquad\quad \underline{4x^2+12x} \\
\qquad\qquad -5x-15 \\
\qquad\qquad \underline{-5x-15} \\
\qquad\qquad\ \ = \quad =
\end{array}$$

21. בשאלות חקירה בהן מבקשים למצוא את הפרמטרים – יש לרשום קודם כל את התנאים שמאפשרים למצוא את הפרמטרים ואז להציב ולפתור, למשל:
כאשר נתון שיש נקודת קיצון ב- $x=3$ אז התנאי הוא: $y'(3)=0$.

22. בחקירת פונקציה עם פרמטר (כשהפרמטר נצמד), עומדות לפניכם שתי אפשרויות לזהות את סוג הקיצון: טבלה או נגזרת שנייה. (ניתן להיעזר בשתי האפשרויות באותה שאלה).
בטבלה יש קושי, לפעמים, להציב ערכים לפני הנקודה החשודה ואחריה.

23. בחקירה טריגונומטרית ניתן לעבוד עם מעלות, אך <u>תשובה סופית</u> לכל סעיף וסעיף בחקירה <u>חייבת להינתן ברדיאנים</u>.

24. כאשר רוצים להציב בפונקציה טריגונומטרית, ניתן לעשות זאת ברדיאנים או במעלות, אלא אם הפונקציה הטריגונומטרית משולבת עם פונקצית חזקה ואז <u>חובה להציב רדיאנים</u>.

לדוגמא: נתונה הפונקציה $f(x)=3x+\sin x+\cos\left(x^2\right)$ מצא את $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left[\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right]=\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}+0.9627=3.0335 \ .$$

כאשר מציבים, <u>שימו לב שהמחשבון שלכם מכוון נכון</u> (למעלות או רדיאנים).
לא לשכוח להחזיר את המחשבון למצב מעלות! (הבדיקה היא: $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$).

25. בחקירה טריגונומטרית, לאחר הגזירה, מקבלים משוואה טריגונומטרית אותה יש לפתור - מצאו תחילה את הפתרון הכללי וממנו מצאו את הפתרון המתאים לתחום שהוגדר לכם.

26. במשוואה טריגונומטרית יש להוציא גורמים משותפים ולא לצמצם, וזאת על-מנת לא לאבד פתרונות.

27. מותר לחלק משוואה טריגונומטרית ב- $\cos x$, רק אם $x = 90^\circ$ הוא לא פתרון המשוואה.

לדוגמא: $\sin x = \cos x \quad \Rightarrow \quad tgx = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 45^\circ + 180^\circ k$

יש לרשום - " $x = 90^\circ$ הוא לא פתרון המשוואה ולכן חילקתי ב- $\cos x$".

28. מומלץ להשתמש במקרים המיוחדים בפתרון משוואות טריגונומטריות, לדוגמא:

פתרון במעלות:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k \quad , \quad \cos x = 0 \Rightarrow x = 90^\circ + 180^\circ k$$

פתרון ברדיאנים:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k \quad , \quad \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

29. יש לזכור את המגבלות של ה- tg וה- cot ("אתם שם תרדו מהדשא").

המגבלה של tgx היא: $x \neq 90^\circ + 180^\circ k$.

המגבלה של $\cot x$ היא: $x \neq 180^\circ k$.

30. יש לדעת לפתח את המעבר ממכפלת שתי פונקציות טריגונומטריות לסכומן.
(לא מופיע בדף הנוסחאות).

הנוסחאות הן:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

31. בתחומי עלייה וירידה מומלץ שמספר החיצים העולים והיורדים בטבלה יהיה שווה למספר התחומים של העלייה והירידה. (בלי לעשות שימוש בסימן שונה $\neq$)

32. אין לעשות שימוש ב"שווה" בתחומי עליה וירידה.

33. כאשר הנגזרת הראשונה לא מוגדרת בנקודה מסוימת אז המשיק בנקודה זו מאונך לציר ה- x. בציור השרטוט הסכמתי, של גרף הפונקציה, יש להתחשב בכך ולהראות זאת.

34. בנקודת פיתול ששיפוע המשיק בה מקביל לציר ה-x, יש להקפיד בשרטוט הסכמתי להראות ולהדגיש זאת.

35. למציאת נקודות חשודות בפיתול יש לבצע <u>נגזרת שנייה מלאה</u> (בלי קיצורים).

36. נקודת פיתול מתקבלת כאשר יש מעבר מקעירות כלפי מעלה $\cup$, לקעירות כלפי מטה $\cap$ ולהיפך.

37. את הבדיקה שאכן זו נקודת פיתול ניתן לעשות בעזרת:

א. טבלה, מבחן הנגזרת השנייה - בדיקת הקעירות לפני ואחרי הנקודה החשודה בפיתול.

ב. הנגזרת השלישית - אם $f''(x_1)=0$ ו - $f'''(x_1)\neq 0$, אז x_1 היא נקודת פיתול.

(מומלץ על ביצוע טבלה, אלא אם מדובר על פרמטר ניצמד).

38. בפונקציות רציונאליות אם מסובך להגיע לנגזרת השלישית, ניתן לבצע קיצור:

(מונה y'')', כלומר להסתפק בנגזרת המונה של הנגזרת השנייה.

39. לפני ואחרי נקודת מינימום - הקעירות היא כלפי מעלה $\cup$, ולפני ואחרי נקודת מקסימום - הקעירות היא כלפי מטה $\cap$.

40. בסעיף המבקש למצוא את תחומי הקעירות הניסוח והסימון המומלצים הם:

"תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ הם" , "תחומי קעירות כלפי מטה $\cap$ הם" , וזאת על מנת להבהיר את הכוונה שלכם.

41. כאשר משתמשים בטבלה אחת שכוללת "מבחן הנגזרת הראשונה" ומבחן הנגזרת השנייה" אז במציאת תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה, ניתן "להתעלם" <u>מנקודות הקיצון</u>. ולמציאת תחומי עליה וירידה ניתן "להתעלם" <u>מנקודות הפיתול</u>. (מומלץ להפריד בין הטבלאות).

42. השרטוט הסכמתי חייב להתאים לכל התשובות של סעיפי חקירת הפונקציה.

43. בשאלה עם פיתול יש להקפיד לשרטט נכון את הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה.

44. בשרטוט הסכמתי: שרטטו גרף גדול, מעוגל ויפה. יש להוסיף על השרטוט את סימון הצירים (ציר ה-x וציר ה-y) , נקודות הקיצון, נקודות החיתוך, נקודת פיתול, האסימפטוטות, "חורים" ואת "החושך".

ליד השרטוט נא לרשום: "שרטוט סכמתי ללא קנה מידה".

45. בשאלות שבהן מבקשים:

"עבור אלו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה במספר נקודות?" - הפיתרון הוא בהתאם לשרטוט (לא פתרון מתמטי).

46. בשאלות בהן לאחר שלבי חקירת הפונקציה $f(x)$ מוסיפים סעיף בו נאמר כי הפונקציה שחקרתם היא נגזרת של פונקציה $g(x)$ ומחפשים נקודות קיצון של $g(x)$.

אז נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x הן הנקודות החשודות בקיצון עבור $g(x)$.

יש לשים לב מה קורה, לפני ואחרי נקודות אלה, מתי הפונקציה $f(x)$ חיובית ומתי היא שלילית.

47. כאשר מבקשים בשאלה למשל מצא את התחום שבו $f'(x)\bullet f''(x)>0$ יש לחפש מתי שתי הנגזרות הנ"ל חיוביות <u>או</u> מתי שתי הנגזרות הנ"ל שליליות :

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x)>0 \\ f''(x)>0 \end{array}\right. \text{וגם} \qquad \text{או} \qquad \left\{\begin{array}{l} f'(x)<0 \\ f''(x)<0 \end{array}\right. \text{וגם}$$

את הפתרון לנ"ל ניתן למצוא בשרטוט הסכמתי ששרטטתם או בטבלה שבה הראתם את העלייה והירידה, וכן בטבלה שבה הראתם את הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה.

48. יש לדעת את ההגדרות המתמטיות לפונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית:

פונקציה זוגית מוגדרת: $f(-x)=f(x)$

פונקציה אי-זוגית מוגדרת: $f(-x)=-f(x)$

מבחינה גרפית - פונקציה זוגית סימטרית ביחס לציר ה- y ופונקציה אי-זוגית סימטרית לשני הצירים.

49. בחקירה ניתן לנצל פונקציה זוגית לצורך שרטוט או לצורך בדיקה שאכן שרטטתם נכון.

50. יש להכיר את שתי השיטות למציאת משוואת משיק מנקודה שלא על גרף הפונקציה.

להזכירכם:

בשתי השיטות יש לסמן נקודה על הפונקציה עם הפרמטר t .

בשיטה הראשונה שיפוע הישר העובר דרך שתי הנקודות הוא הנגזרת של הפונקציה בנקודה $x=t$.

בשיטה השנייה יש למצוא את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה $x=t$ ואחר כך יש להציב את הנקודה שלא על גרף הפונקציה במשוואת המשיק הנ"ל ולמצוא את t .

51. יש לדעת את התנאים בהם לפונקציה ממעלה שנייה יהיו: פתרון אחד, שני פתרונות ואף פתרון.

52. יש לדעת לחקור פונקציה ממעלה ראשונה.

הצורה הנורמלית של משוואה ממעלה ראשונה, עם נעלם אחד, היא $ax=b$.

למשוואה זו יש פתרון יחיד כאשר $a\neq 0$.

למשוואה זו אין פתרון כאשר $a=0$ וגם $b\neq 0$.

למשוואה זו יש אינסוף פתרונות כאשר $a=0$ וגם $b=0$.

ולסיום:-

זכרו כי המסמך בא לתת לכם רק הנחיות כלליות ותזכורת לחומר הלימוד ואינו פותר אתכם מחזרה ותרגול של כל החומר!

בהצלחה בבחינה!!!