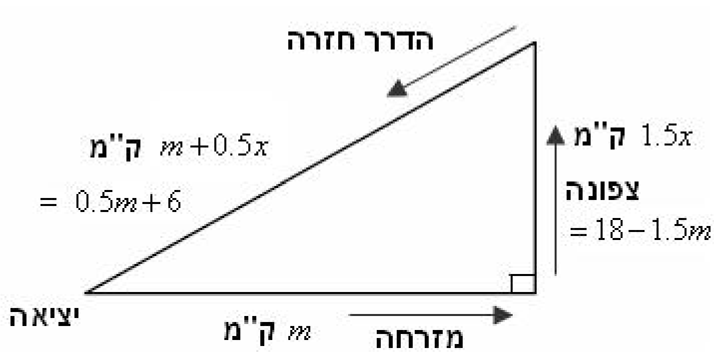
א. נסמן ב- x את מהירות ההולך (קמ"ש, קבועה)

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

	זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
מזרחה	$\frac{m}{x}$	x	m
צפונה	1.5	x	$1.5x$
חזרה	$\frac{m}{x}+1.5-1$	x	$m+0.5x$

סך הכול המסלול 24 **ק"מ.**

המשוואה המתאימה, אם כן, היא:



$$m+1.5x+m+0.5x=24$$
$$2m=24-2x$$
$$2x=24-2m$$
$$x=12-m$$

ולכן אורך הדרך חזרה: $m+0.5(12-m)=0.5m+6$

ואורך הדרך צפונה: $1.5(12-m)=18-1.5m$

ע"פ משפט פיתגורס

$$(0.5m+6)^2=(18-1.5m)^2+m^2$$

נפתור את המשוואה:

$$(0.5m+6)^2=(18-1.5m)^2+m^2$$
$$0.25m^2+6m+36=324-54m+2.25m^2+m^2$$
$$3m^2-60m+288=0$$
$$m_{1,2}=\frac{60\pm12}{6}$$
$$\cancel{m_1=12\rightarrow x=0}\quad\leftarrow x>0$$
$$m_2=8\quad\rightarrow x=4\quad o.k.$$

תשובה: $m=8$ **(ק"מ).**

1. נבדוק עבור $n=1$ **:**

אגף ימין: $5-\frac{5}{1+1}=2.5$ $<$ **אגף שמאל:** $S_1=a_1=\frac{5}{2^2}=1.25$

לכן, הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה), כלומר:** $S_k<5-\frac{5}{k+1}$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**, לכן צ"ל**

$$S_{k+1}<5-\frac{5}{k+2}$$

$$\underset{\downarrow}{\underline{S_k}}+a_{k+1}<5-\frac{5}{k+2}$$

$$5-\frac{5}{k+1}+\frac{5}{(k+2)^2}\le 5-\frac{5}{k+2}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי הגדול ממנו,

לכן, די אם נוכיח אי-שוויון חלש (כולל סימן השוויון)

$$\Leftrightarrow 5-\frac{5(k+2)^2-5(k+1)}{(k+1)(k+2)^2}\le 5-\frac{5}{k+2}$$

$$\Leftrightarrow 5-\frac{5(k^2+4k+4-k-1)}{(k+1)(k+2)^2}\le 5-\frac{5(k+1)(k+2)}{(k+1)(k+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 5-\frac{5\boxed{(k^2+3k+3)}}{(k+1)(k+2)^2}\le 5-\frac{5\boxed{(k^2+3k+2)}}{(k+1)(k+2)^2}$$

כיוון שהכופל במסגרת הימנית חיובי וקטן מהכופל במסגרת השמאלית, בעוד ששני המכנים חיוביים,

עבור k **טבעי, הרי שהמחסר באגף ימין גדול מהמחסר באגף שמאל, ואגף שמאל קטן מאגף ימין.**

מתקבל שאגף שמאל קטן מאגף ימין.

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$**, הראינו שאם הטענה נכונה עבור** $n=k$ **טבעי**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$ **לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל** n **טבעי.**

ב. נתון כי $S_n<4.999$ **כאשר הוכחנו כי** $S_n<5-\frac{5}{n+1}$

על-מנת שהנתון יתקבל בוודאות נדרש

$$5-\frac{5}{n+1}\le 4.999$$

$$0.001\le\frac{5}{n+1}\quad /\cdot(n+1>0)$$

$$n+1\le 5000$$

$$n\le 4999$$

תשובה: 4999 **איברים לכל היותר**

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - תלמידים הלומדים בכיתה י"א 1

$\overline{A}$ - תלמידים הלומדים בכיתה י"א 2

B - תלמידים בעלי מחשב נישא

$\overline{B}$ - תלמידים שאין להם מחשב נישא

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$N(A) = 40$$

$$P(B/A) = 0.5 \quad \rightarrow P(\overline{B}/A) = 0.5$$

$$N(\overline{A}) = 35$$

$$P(B/\overline{A}) = 0.4 \quad \rightarrow P(\overline{B}/\overline{A}) = 0.6$$

<u>פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית</u>

$$P(B/A) = \frac{N(B \cap A)}{N(A)} \rightarrow \quad 0.5 = \frac{N(B \cap A)}{40} \rightarrow N(B \cap A) = 20$$

$$P(B/\overline{A}) = \frac{N(B \cap \overline{A})}{N(\overline{A})} \rightarrow \quad 0.4 = \frac{N(B \cap \overline{A})}{35} \rightarrow N(B \cap \overline{A}) = 14$$

נציב הנתונים בטבלה דו-ממדית שתציג את מספרי התלמידים, ולא את ההסתברויות המתאימות

	A י"א 1	$\overline{A}$ י"א 2	
B - בעלי מחשב	20	14	34
$\overline{B}$ - ללא מחשב	20	21	41
	40	35	75

יש למצוא את ההסתברות של תלמידי כיתה י"א 2 מקרב בעלי מחשב נישא

$$P(\overline{A}/B) = \frac{N(\overline{A}/B)}{N(B)} = \frac{14}{34} = \frac{7}{17}$$

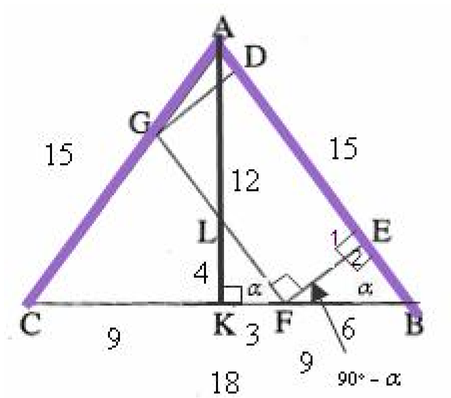
תשובה: ההסתברות שנבחר תלמיד מכיתה י"א 2, מבין בעלי מחשב נישא, היא $\frac{7}{17}$.

ב. יש למצוא את ההסתברות שלארבעה תלמידים שנבחרו, 2 מכיתה י"א 1 ו- 2 מכיתה י"א 2 אין מחשב נישא

$$P = \frac{20}{40} \cdot \frac{19}{39} \cdot \frac{21}{35} \cdot \frac{20}{34} = \frac{19}{221}$$

תשובה: ההסתברות שלארבעתם אין מחשב נישא היא $\frac{19}{221}$.

א. נפתור את השאלה באמצעות כלים גיאומטריים



נתונים

1. ΔABC שווה שוקיים $(AB = AC)$
2. $ABCD$ מלבן
3. L מפגש תיכונים ב- ΔABC
4. $LK \perp BC$

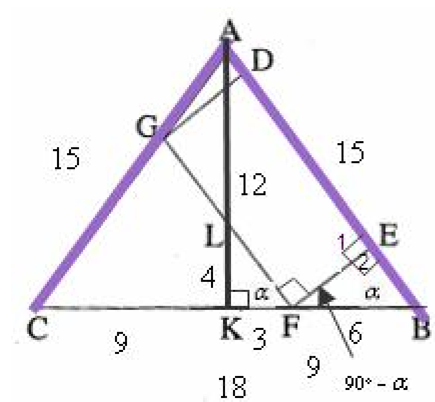
עבור ב

5. $AB =$ 15 ס"מ
6. $BC =$ 18 ס"מ

צ"ל: א. $\Delta KAB \sim \Delta KLF \sim \Delta EFB$

ב. אורך KF ג. אורך FE

הסבר		טענה	נימוק
1	7	ΔABC שווה שוקיים	נתון
3	8	L מפגש תיכונים ב- ΔABC	נתון
8 ,7	9	L נמצאת על הגובה לבסיס	התיכון לבסיס במש"ש מתלכד עם הגובה
4	10	$LK \perp BC$	נתון
10 ,9	11	ALK קו ישר	בניית עזר
	12	$\angle B = \sim$	סימון
2	13	$ABCD$ מלבן	נתון
4	14	$\angle E_1 = \angle E_2 = \angle F = 90°$	זוויות המלבן ישרות וזוויות צמודות משלימות ל $180°$
14 ,12	15	$\angle EFB = 90 - \sim$	סכום זוויות ΔEFB $180°$
15 ,14	16	$\angle LFK = \sim$	זווית שטוחה שווה $180°$
16 ,12	17	$\angle KBA = \angle KFL = \angle FBE$ (ז)	כלל המעבר וזווית משותפת
14 ,10	18	$\angle AKB = \angle LKF = \angle FEB$ (ז)	כלל המעבר וזווית משותפת
18 ,17	19	$\Delta KAB \sim \Delta KLF \sim \Delta EFB$	משפט דמיון ז. ז.
		מ. ש. ל. א	



ב. נפתור את השאלה באמצעות כלים טריגונומטריים וגיאומטריים

$AB = 15$ ס"מ (נתון)

$BC = 18$ ס"מ (נתון)

$KB = 9$ ס"מ (חישוב)

$AK = 12$ ס"מ (משפט פיתגורס ΔAKB)

$KL = 4$ ס"מ (התיכונים מחלקים זה את זה ביחס של $2:1$)

$\underline{\Delta AKB}$

$$\tan\sim = \frac{AK}{KB}$$

$$\tan\sim = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$\underline{\Delta LKF}$

$$\tan\sim = \frac{LK}{KF}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{4}{KF}$$

$KF = 3$ ס"מ (מ.ש.ל)

ג. $FB = 6$ ס"מ (הפרש קטעים)

$\underline{\Delta AKB}$

$$\sin\sim = \frac{AK}{AB}$$

$$\sin\sim = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$\underline{\Delta LKF}$

$$\sin\sim = \frac{FE}{FB}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{FE}{6}$$

$FE = 4.8$ ס"מ (מ.ש.ל)

נתונים

1. CD **קוטר המעגל , 2.** FE **קוטר במעגל**

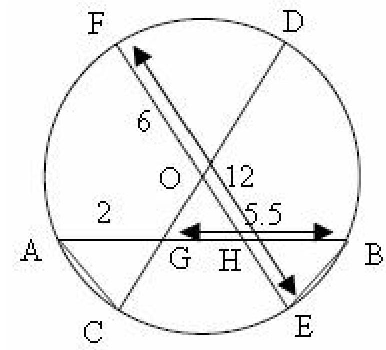
3. $AG = BH = 2$ **ס"מ**

4. $GB = 5.5$ **ס"מ**

5. 6 **ס"מ – רדיוס המעגל**

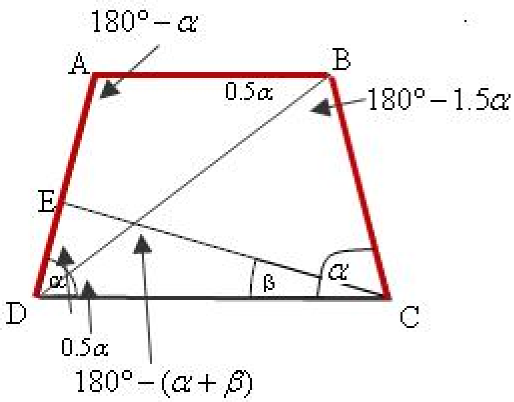
6. GC **ו-** HE **קטנים מרדיוס המעגל**

צ"ל: א. אורך GC **,** HE **. ב.** $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BE}$ **.**



הסבר		טענה	נימוק
1	7	CD קוטר המעגל	נתון
2	8	FE קוטר במעגל	נתון
5	9	6 ס"מ – רדיוס המעגל	נתון
7, 8, 9	10	$CD = FE = 12$ ס"מ	אורך הקוטר שווה לשני אורכי רדיוסים
2	11	$AG = BH = 2$ ס"מ	נתון
4	12	$GB = 5.5$ ס"מ	נתון
3	13	$GC = x$	סימון
10, 11, 12, 13	14	$EH\cdot FH = AG\cdot GB$ $x(12-x) = 2\cdot 5.5$ $x^2 - 12x + 11 = 0$	שני מיתרים נחתכים במעגל, כך שמכפלת קטעיהם שווה זו לזו
4, 14	15	$x = 1,\ x = 11$	חישוב
6	16	$GC <$ רדיוס המעגל	נתון
15, 16	17	$GC = 1$ ס"מ	
11, 12	18	$GH = 3.5$ ס"מ	הפרש קטעים
10, 18	19	$AH = 5.5$ ס"מ	סכום קטעים
13-17, 19	20	$HE = 1$ ס"מ	כמו שורות 13-17 כאשר $EH\cdot FH = BH\cdot AH$
		מ.ש.ל. א	
17,20	21	$GC = HE$ (צ)	כלל מעבר
7, 8	22	O מרכז המעגל	הקטרים חותכים זה את זה במרכז המעגל
22	23	$OC = OE$	רדיוסים שווים במעגל
23, 21	24	$OG = OH$	חיסור קטעים שווים מקטעים שווים
24	25	$\angle OGH = \angle OHG$	מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ΔOGH
25	26	$\angle AGC = \angle BHE$ (ז)	זוויות קדקדיות לזוויות שוות
21, 25, 11	27	$\Delta AGC \cong \Delta BHE$	משפט חפיפה צ.ז.צ
27	28	$AC = BE$	צ.מ.ב.ח.
28	29	$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BE}$	על מיתרים שווים נשענות קשתות שוות
		מ.ש.ל. ב	

א. מציג ציור מעודכן ונראה את חישובי הזוויות הנדרשות לתרגיל



$\angle A = 180° - \sim$ **(זווית חד צדדיות בי בסיסים מקבילים)**

$AD = AB = BC$ **(טרפז שווה שוקיים, והשוק שווה לבסיס הקטן)**

$\angle ABD = \angle ADB = 0.5\sim$ **(זוויות בסיס שוות במש"ש** DAB **)**

$\angle BDC = \angle ABD = 0.5\sim$ **(זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים)**

$\angle BCD = \sim$ **(זוויות בסיס שוות במש"ש)**

$\angle DEC = 180° - (\sim + \ )$ **(סכום זוויות משולש** DEC 180° **)**

$\angle DBC = 180° - 1.5\sim$ **(סכום זוויות משולש** BDC 180° **)**

למשולש DEC **ולמשולש** DBC **יש צלע משותפת** DC, **וזווית אחת שווה** $\angle BCD = \angle EDC = \sim$

נסמן: $BC = x$

$\underline{\Delta BDC}$

$$\frac{BC}{\sin\angle BDC} = \frac{DC}{\sin\angle DBC}$$

$$\frac{x}{\sin 0.5\sim} = \frac{DC}{\sin(180 - 1.5\sim)}$$

$$DC = \frac{x\sin 1.5\sim}{\sin 0.5\sim}$$

$\underline{\Delta DEC}$

$$\frac{DE}{\sin\angle ECD} = \frac{DC}{\sin\angle DEC}$$

$$\frac{DE}{\sin} = \frac{DC}{\sin(180° - (\sim + \ ))}$$

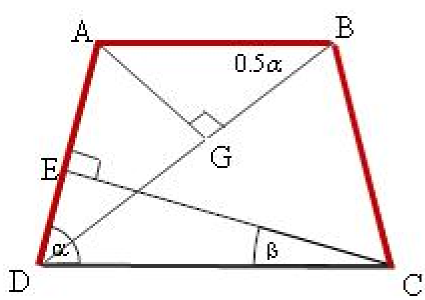
$$DE = \frac{x \sin 1.5\sim \sin}{\sin 0.5\sim \sin(\sim + \ )}$$

$$\frac{S_{\Delta DEC}}{S_{\Delta BDC}} = \frac{\frac{DC \cdot DE \cdot \sin\sim}{2}}{\frac{DC \cdot BC \cdot \sin\sim}{2}} = \frac{DE}{BC} = \frac{\frac{x \sin 1.5\sim \sin}{\sin 0.5\sim \sin(\sim + \ )}}{x} = \frac{\sin 1.5\sim \sin}{\sin 0.5\sim \sin(\sim + \ )}$$

תשובה: $\frac{\sin 1.5\sim \sin}{\sin 0.5\sim \sin(\sim + \ )}$

ב. נתון: $\angle AEC = 90°$ **ובהתאם** $\sim + \ = 90°$ **(זווית חיצונית שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שלא צמודות לה)**

$BD = 1.5AB$ **(נתון)**



$AG \perp BD$ **(בניית עזר, ולכן גם תיכון שמתלכד עם גובה במש"ש)**

$BD = 1.5BC$ **(כלל מעבר) ובהתאם:** $BG = 0.75BC$

$\underline{\Delta ABG}$

$$\cos\angle ABG = \frac{BG}{AB}$$

$$\cos 0.5\sim = 0.75$$

$$0.5\sim = 41.41° \rightarrow \sim = 82.82° \rightarrow \ = 7.18°$$

$$\frac{S_{\Delta DEC}}{S_{\Delta BDC}} = \frac{\sin 1.5\sim \sin}{\sin 0.5\sim \sin(\sim + \ )} = \frac{\sin(1.5 \cdot 82.82°)\sin 7.18°}{\sin(0.5 \cdot 82.82°)\sin 90°} = 0.1562$$

תשובה: $\frac{S_{\Delta DEC}}{S_{\Delta BDC}} = 0.1562$

נתונה הפונקציה נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}$ בתחום $-\frac{3\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

נקודת ההשקה: $f(0)=\frac{\cos 0}{\sqrt{1-\sin 0}}=1\to \mathrm{A}(0,1)$

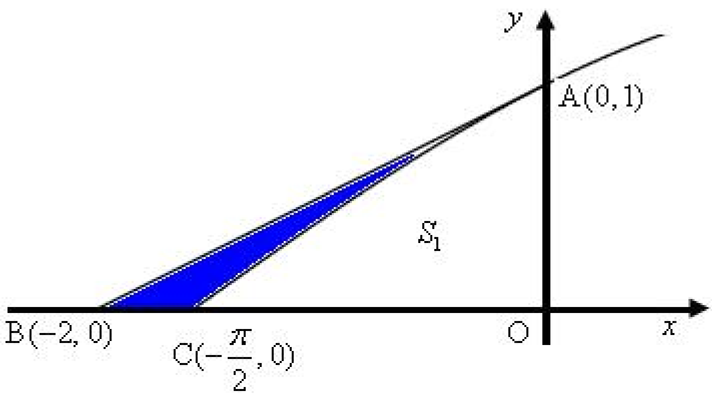
$$f'(x)=\frac{-\sin x\sqrt{1-\sin x}-\frac{-\cos^2 x}{2\sqrt{1-\sin x}}}{1-\sin x}\quad\to\quad m=f'(0)=\frac{-\sin 0\sqrt{1-\sin 0}-\frac{-\cos^2 0}{2\sqrt{1-\sin 0}}}{1-\sin 0}=0.5$$

נמצא את משוואת המשיק: $(0,1),\ m=0.5$: $y-1=0.5(x-0)\to y=0.5x+1$

נמצא את נקודות החיתוך בין $y=0.5x+1$

לציר ה- x , $0=0.5x+1\to \mathrm{B}(-2,0)$.

נמצא את נקודות החיתוך בין הפונקציה לציר ה- x



$$0=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}$$

,

$$\cos x=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k\to \mathrm{C}(-\frac{\pi}{2},0)\quad\leftarrow k=-1$$

נחשב את השטח המבוקש: $S_{\mathrm{BLUE}}=S_{\Delta\mathrm{AOB}}-S_1$

$$S_{\Delta\mathrm{AOB}}=\frac{2\cdot 1}{2}=1$$

נחשב את האינטגרל, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית

של הביטוי שבתוך השורש הריבועי

$$S_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}-0\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}\cdot(-\cos x)\right)dx$$

$$S_1=\left.(-2\sqrt{1-\sin x})\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$S_1=(-2\sqrt{1-\sin 0})-(-2\sqrt{1-\sin(-\frac{\pi}{2})})$$

$$S_1=-2-(-2\sqrt{2})$$

$$\boxed{S_1=2\sqrt{2}-2}$$

$$S_{\mathrm{BLUE}}=1-(2\sqrt{2}-2)=3-2\sqrt{2}$$

תשובה: $3-2\sqrt{2}$ **יח"ר**

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-a}{x-b}$ **,** $a,b>0$ **,** $a\neq b$ **.**

שיעור ה- x **של נקודות החיתוך עם ציר ה-** y **:** $x=a \leftarrow 0=\frac{x-a}{x-b}$

$$f'(x)=\frac{x-b-(x-a)}{(x-b)^2}$$

$$f'(x)=\frac{a-b}{(x-b)^2}$$

$$f'(0)=\frac{a-b}{(0-b)^2}=\frac{a-b}{b^2}$$

$$f'(a)=\frac{a-b}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b} \quad \leftarrow a\neq b$$

$$\frac{1}{a-b}=\frac{a-b}{b^2} \quad \leftarrow f'(a)=f'(0)$$

$$\cancel{b^2}=a^2-2ab+\cancel{b^2}$$

$$\boxed{a=2b} \quad \leftarrow /:a>0$$

נציב $a=2b$ **ונקבל:** $\boxed{f(x)=\frac{x-2b}{x-b}}$ **,** $f(x)=\frac{x-2b}{x-b}$ $b>0$

ב. $\lim_{x\to\infty}\frac{x-2b}{x-b}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2b}{x}}{1-\frac{b}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-0}{1-0}=1$ **, לכן** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית**

$$\lim_{x\to b^+}\frac{x-2b}{x-b}=\frac{b-2b}{b^+-b}=\frac{-b}{0^+}=-\infty \quad \leftarrow b>0$$

$$\lim_{x\to b^-}\frac{x-2b}{x-b}=\frac{b-2b}{b^--b}=\frac{-b}{0^-}=+\infty \quad \leftarrow b>0$$

, לכן $x=b$ **אסימפטוטה אנכית**

תשובה: אסימפטוטה אופקית $y=1$ **, אסימפטוטה אנכית** $x=b$ **.**

ג. נמצא תחומי עלייה וירידה

$$f'(x)=\frac{x-b-(x-2b)}{(x-b)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{b}{(x-b)^2}}$$

כיוון ש- $b>0$ **הפונקציה עולה לכל** $x\neq b$

תשובה: עלייה - $x>b$ **או** $x<b$ **, ירידה – אף** x **.**

ד. בנקודת חיתוך עם ציר x **מתקיים** $y=0$ **ונקבל:** $(2b,0)$

בנקודת חיתוך עם ציר y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל** $(0,2)$

תשובה: $(0,2)$ **,** $(2b,0)$ **.**

ה. נמצא תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$.

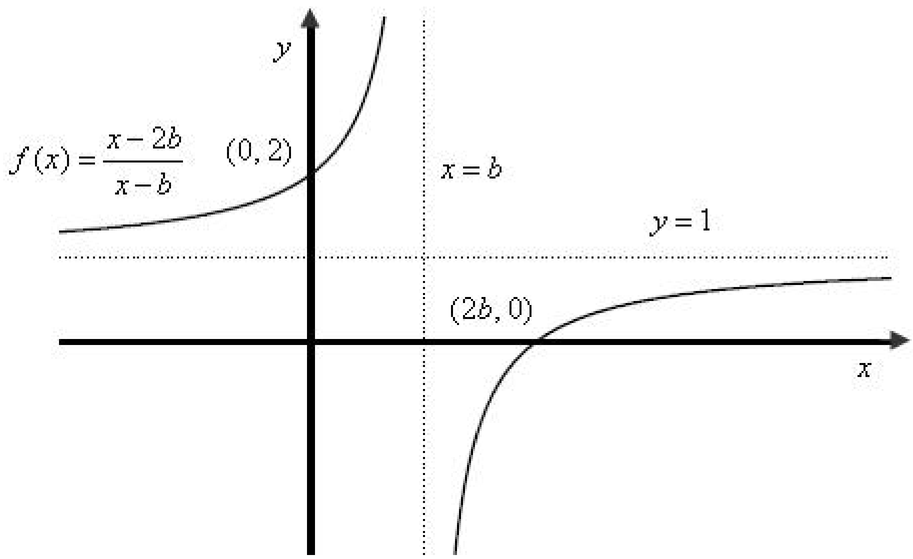
$$f''(x)=-\frac{2b(x-b)}{(x-b)^4}\quad\rightarrow\quad\boxed{f''(x)=\frac{2b(b-x)}{(x-b)^4}}$$

כיוון ש- $b>0$ הכופל שקובע את סימן הנגזרת השנייה הוא $b-x$

ועבור $x=b$ אין נקודת פיתול, שכן *לא* בתחום ההגדרה.

תשובה: קעורה כלפי מעלה $\cup$ עבור $x<b$, קעורה כלפי מטה $\cap$ עבור $x>b$.

ו. עבור $b>0$ הסקיצה המתאימה



ז. נמצא תחומי עלייה וירידה

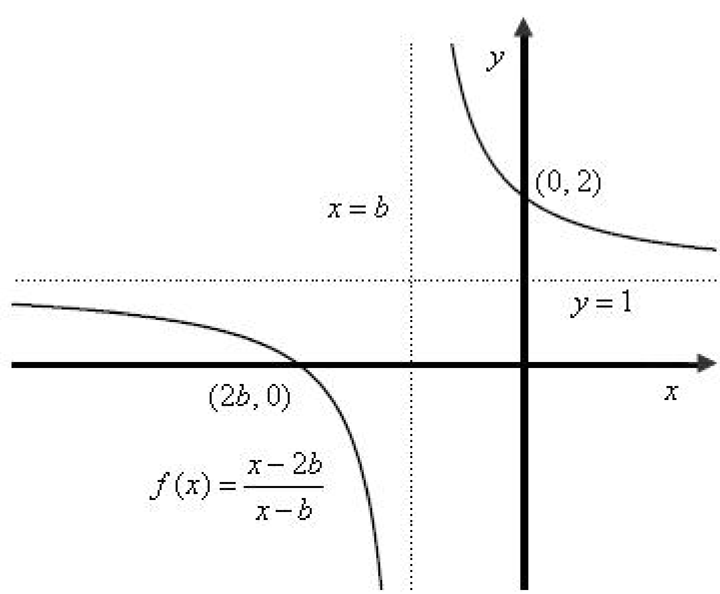
$$f'(x)=\frac{b}{(x-b)^2}$$

כיוון ש- $b<0$ הפונקציה יורדת לכל $x\neq b$

$$f''(x)=\frac{2b(b-x)}{(x-b)^4}$$

כיוון ש- $b<0$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ עבור $x>b$,

קעורה כלפי מטה $\cap$ עבור $x<b$.

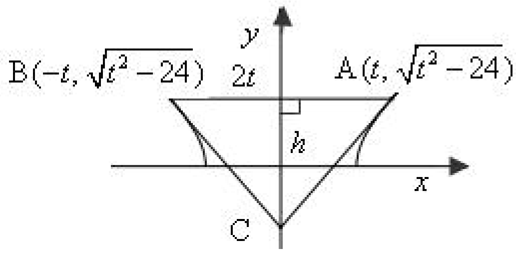


א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2-24}$

$f(-x)=\sqrt{(-x)^2-24}=\sqrt{x^2-24}=f(x)$ **ובהתאם הפונקציה זוגית.**

ב. הפונקציה שיש להביא למינימום **היא** שטח המשולש ABC .

נסמן: t **- שיעור ה-** x **של הנקודה** A .



בהתאם שיעורי הנקודה A **שעל גרף הפונקציה** $A(t,\sqrt{t^2-24})$

כיוון שהפונקציה זוגית, הרי ששיעורי הנקודה $B(-t,\sqrt{t^2-24})$

בהתאם צלע המשולש $\boxed{AB=2t}$

נמצא את משוואת המשיק,ושיעורי הנקודה C **וגובה המשולש**

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-24}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-24}}$$

$$m(x=t)=\frac{t}{\sqrt{t^2-24}}\quad\rightarrow y-\sqrt{t^2-24}=\frac{t}{\sqrt{t^2-24}}(x-t)$$

$$x_C=0\quad\rightarrow y_C=\frac{-t^2}{\sqrt{t^2-24}}+\sqrt{t^2-24}$$

$$h=\sqrt{t^2-24}-\left(\frac{-t^2}{\sqrt{t^2-24}}+\sqrt{t^2-24}\right)\quad\rightarrow \boxed{h=\frac{t^2}{\sqrt{t^2-24}}}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{2t\cdot\frac{t^2}{\sqrt{t^2-24}}}{2}\quad\rightarrow \boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{t^3}{\sqrt{t^2-24}}}$$

$$S'(t)=\frac{3t^2\sqrt{t^2-24}-\frac{2t^4}{2\sqrt{t^2-24}}}{t^2-24}=\frac{3t^2(t^2-24)-t^4}{(t^2-24)\sqrt{t^2-24}}$$

$$\boxed{S'(t)=\frac{2t^4-72t^2}{(t^2-24)\sqrt{t^2-24}}}$$

$$0=2t^4-72t^2$$

$$t=6\quad\leftarrow x_A>0\quad s'(5)=\frac{2\cdot5^4-72\cdot5^2}{+}=\frac{-625}{+}<0,\quad s'(7)=\frac{2\cdot7^4-72\cdot7^2}{+}=\frac{1127}{+}>0$$

$$\boxed{t=6,\quad Min}$$

תשובה: $t=6$.