<u>סיכום - הזזה, מתיחה וכיווץ של פונקציות - שאלון 806</u>

1. <u>המעגל</u>

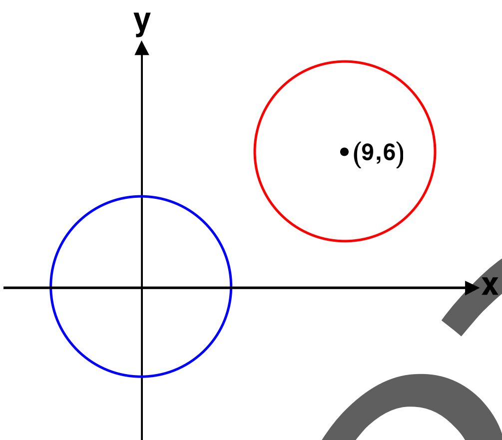
כאשר נזיז את מרכז המעגל הקנוני $x^2+y^2=R^2$ שמרכזו בראשית לנקודה (a,b), נקבל את משוואת המעגל המוזז: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

לדוגמא – אם נרצה שהמעגל הקנוני $x^2+y^2=25$ שמרכזו בראשית ורדיוסו 5 יוזז לנקודה $(-5,4)$ אז נקבל את משוואת המעגל $(x+5)^2+(y-4)^2=25$.

<u>יוצא שהסימנים של שיעורי נקודת המרכז החדשה יהיו הפוכים מהסימנים המופיעים במשוואת המעגל המוזז. רעיון זה ילווה אותנו בכל הפונקציות.</u>

הערה:
אני מודע שחלק מהתלמידים הלומדים בכיתה יא' לא למד את המעגל במסגרת הנדסה אנליטית, אך חשוב להבין את העיקרון.

דוגמא להזזת מעגל:
חשוב לשים לב למשוואות של הפונקציה הבסיסית (המעגל הקנוני) לעומת הפונקציה המוזזת.



משוואת המעגל הכחול: $x^2+y^2=16$

משוואת המעגל האדום: $(x-9)^2+(y-6)^2=16$

ולכן מרכז המעגל המוזז הוא כעת בנקודה $(9,6)$.

2. <u>אליפסה</u>

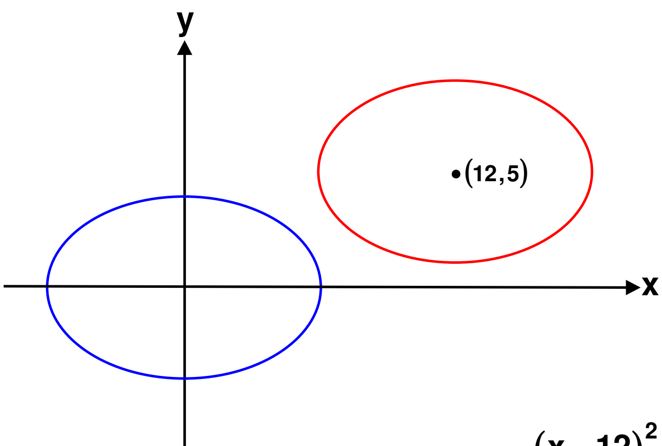
משוואת האליפסה הקנונית היא: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

כאשר נזיז את מרכז האליפסה הקנונית שמרכזה בראשית לנקודה (p,q), נקבל את משוואת האליפסה המוזזת: $\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$.

הערה:
אני מודע לכך שהתלמידים הלומדים בכיתה יא' לא למדו את האליפסה.

דוגמא להזזת אליפסה:

חשוב לשים לב למשוואות של הפונקציה הבסיסית (האליפסה הקנוני) לעומת הפונקציה המוזזת.



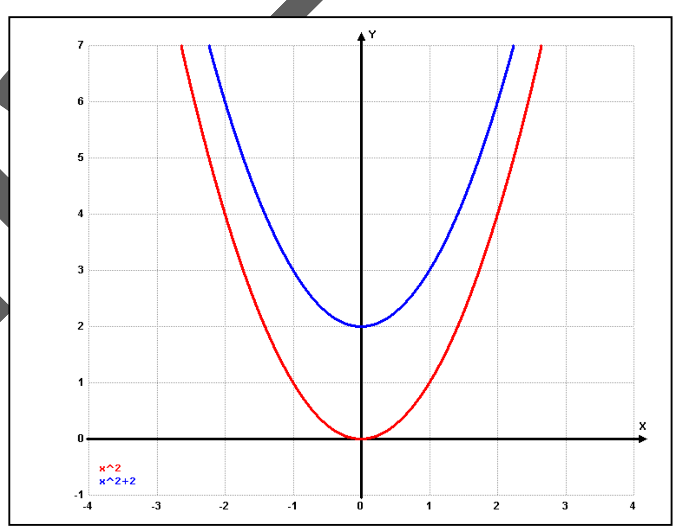
משוואת האליפסה הכחולה: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

משוואת האליפסה האדומה: $\frac{(x-12)^2}{36}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$

ולכן מרכז האליפסה המוזזת הוא כעת בנקודה $(12,5)$.

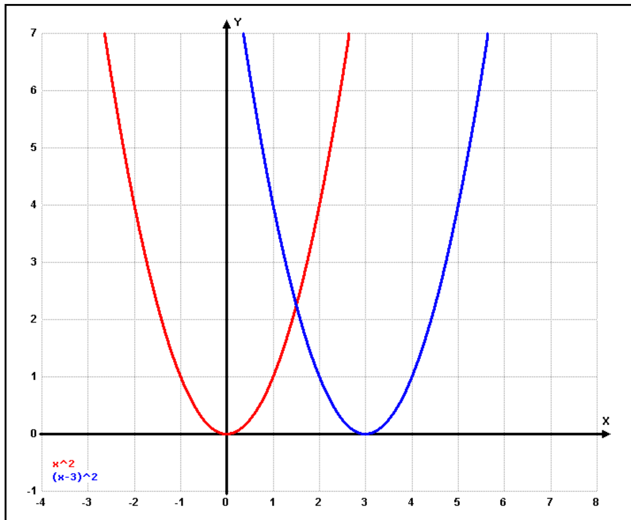
3. <u>פרבולה</u>

א. כאשר נרצה להזיז את קודקוד הפרבולה $y=x^2$ **למשל בשתי יחידות כלפי מעלה נקבל את משוואת הפרבולה החדשה** $y=x^2+2$ **נסדר את המשוואה לצורה** $(y-2)=(x-0)^2$,
כלומר הזזה של קודקוד הפרבולה לנקודה $(0,2)$.



הגרף האדום הפונקציה $y=x^2$ **, הגרף הכחול הפונקציה המוזזת** $y=x^2+2$.

ב. כאשר נרצה להזיז את קודקוד הפרבולה $y = x^2$ למשל ב- שלוש יחידות ימינה נקבל את משוואת הפרבולה החדשה $y = (x-3)^2$. קודקוד הפרבולה הוזז לנקודה $(3,0)$.

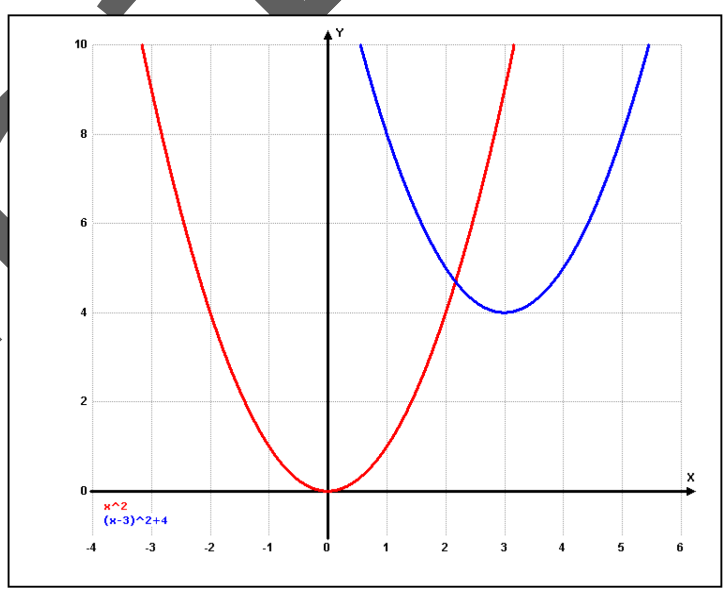


הגרף **האדום** הוא $y = x^2$ והגרף **הכחול** הוא $y = (x-3)^2$.

ג. כאשר נרצה להזיז את קודקוד הפרבולה $y = x^2$ לנקודה (m,n), המשוואה החדשה של הפרבולה תהיה $(y-n) = (x-m)^2$ או בצורת הכתיבה $y = (x-m)^2 + n$.

לדוגמא: משוואת הפרבולה $y = (x-3)^2 + 4$ ניתן להפוך לצורה $(y-4) = (x-3)^2$

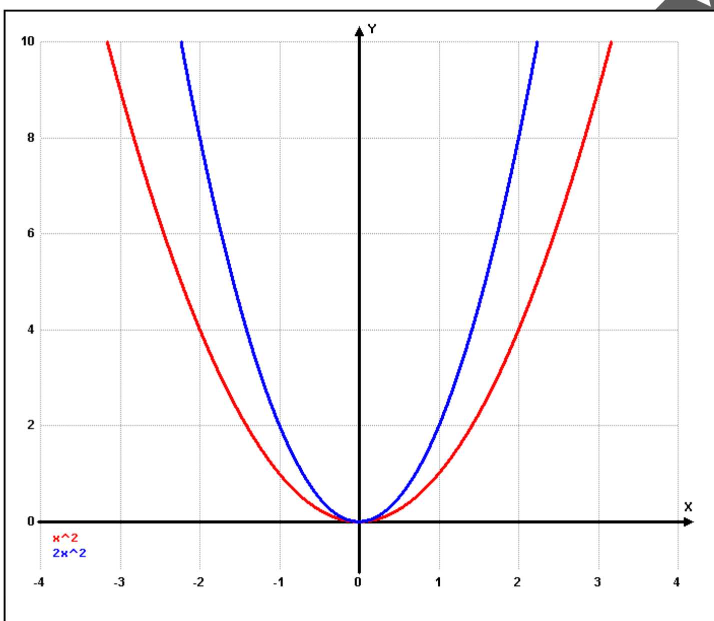
זה אומר שקודקוד הפרבולה הוזז לנקודה $(3,4)$.



הגרף **האדום** הוא $y = x^2$ והגרף **הכחול** הוא $y = (x-3)^2 + 4$.

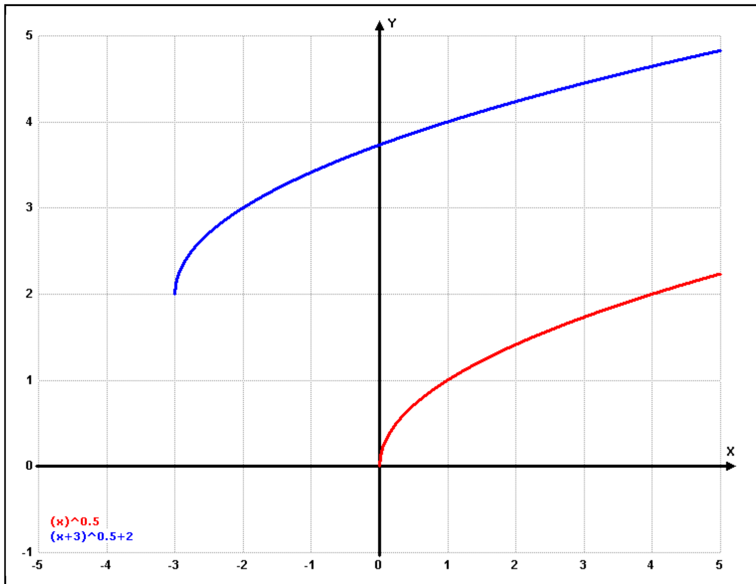
הערה: אם נתונה משוואה ריבועית ורוצים לדעת לאן היא הוזזה ניתן לבצע "השלמה לריבוע".
לדוגמא: נתונה משוואה ריבועית $y=x^2-6x+13$.
נבצע השלמה לריבוע ונקבל: $y=x^2-6x+13=(x-3)^2-9+13=(x-3)^2+4$.
קיבלנו בעצם את המשוואה $(y-4)=(x-3)^2$
מהמשוואה האחרונה ניתן לראות שהפרבולה הוזזה לנקודה $(3,4)$.

ד. המקדם a של הפונקציה $y=ax^2+bx+c$ (הפרבולה) גורם לפתיחה וסגירה של הפרבולה,
כאשר a גדל הפרבולה נסגרת יותר.
בנוסף המקדם a מראה אם הפרבולה צוחקת ($a>0$) או בוכה ($a<0$).



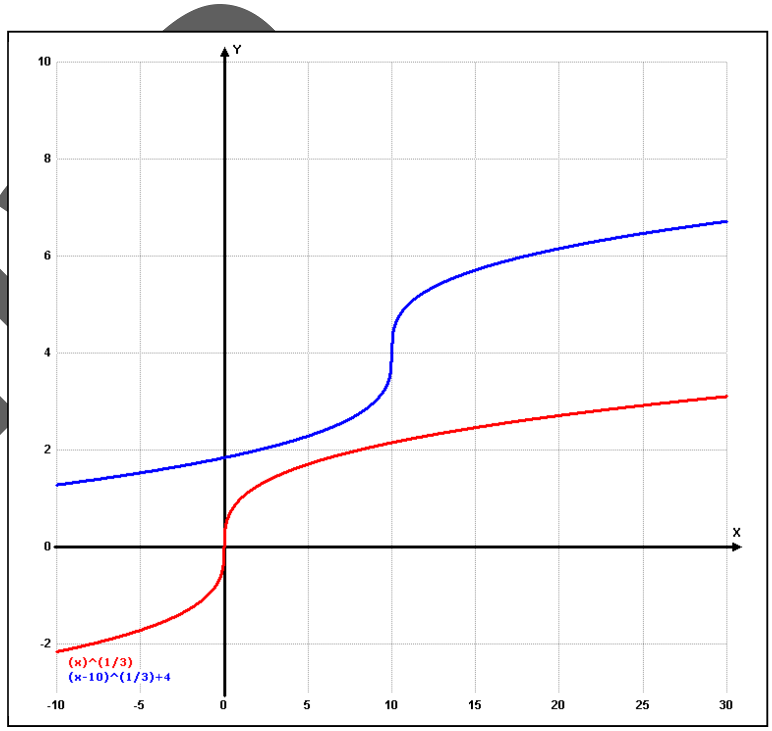
הגרף האדום הוא הפונקציה $y=x^2$, הגרף הכחול הפונקציה $y=2x^2$.
עקב הגדלת המקדם של x^2 הפרבולה נסגרה יותר.

4. הזזת פונקצית השורש $y=\sqrt{x}$



הגרף **האדום** הוא הפונקציה $y=\sqrt{x}$, הגרף **הכחול** הפונקציה $y=\sqrt{(x+3)}+2$.

5. הזזת הפונקציה $y=\sqrt[3]{x}$



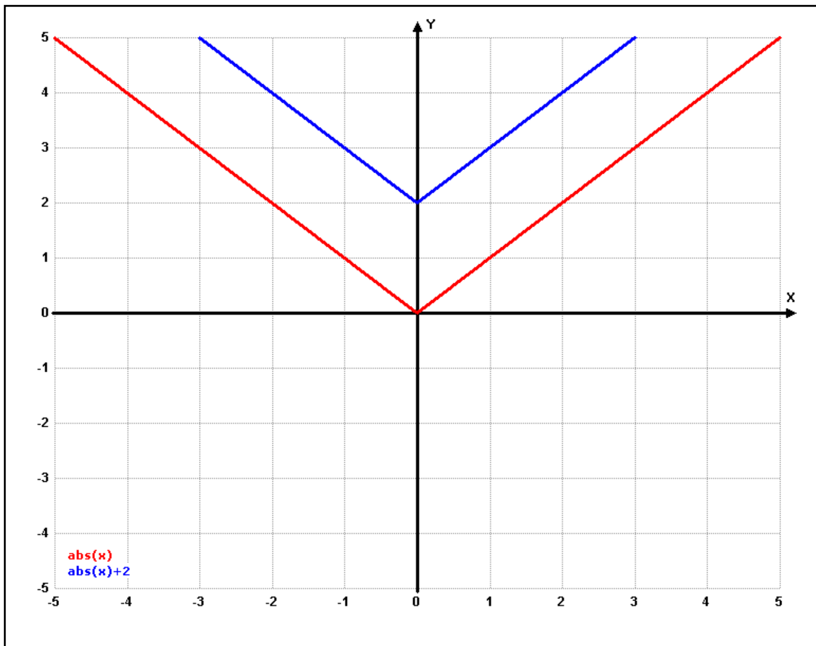
הגרף **האדום** הוא הפונקציה $y=\sqrt[3]{x}$, הגרף **הכחול** הפונקציה $y=\sqrt[3]{x-10}+4$.

6. <u>פונקצית מוזזת עם ערך מוחלט:</u>

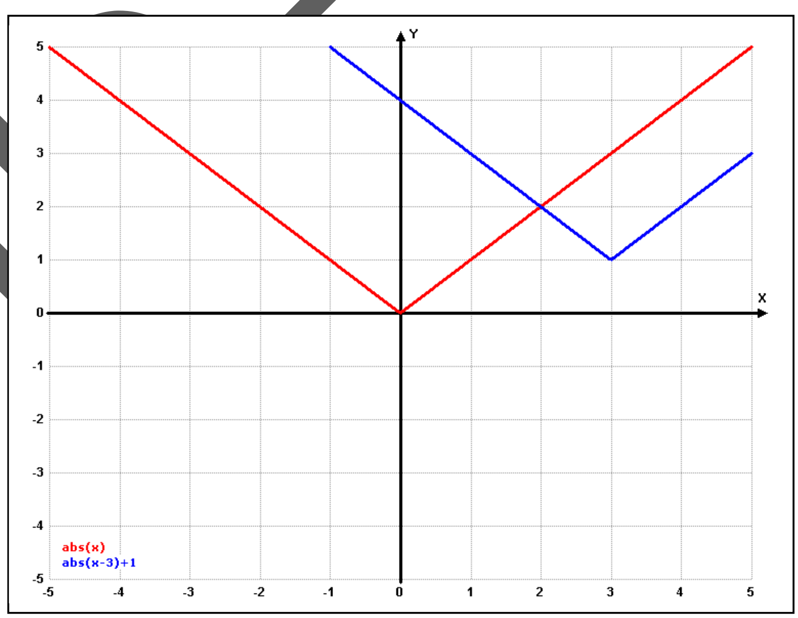
כל התחומים שבהם הפונקציה $f(x)$ שלילית הופכים להיות חיוביים עקב הערך המוחלט,
התחומים שבהם הפונקציה חיובית נשארים כפי שהם.

<u>הפונקציה:</u> $y=|x|$:

(הפונקציה הבסיסית היא $y=x$)



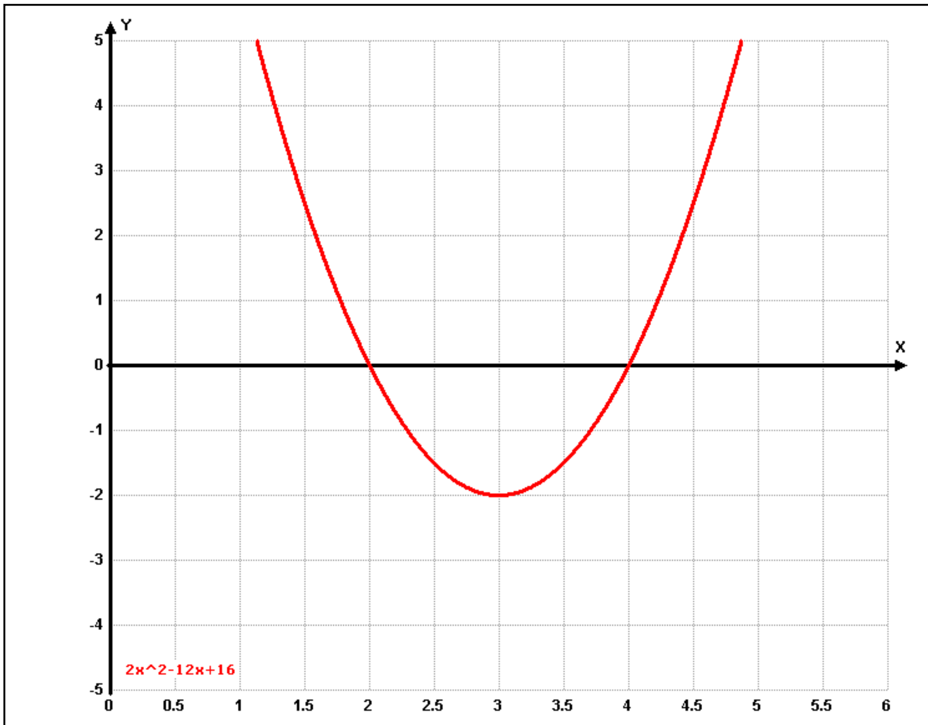
הגרף האדום הוא הפונקציה $y=|x|$, הגרף הכחול הפונקציה $y=|x|+2$



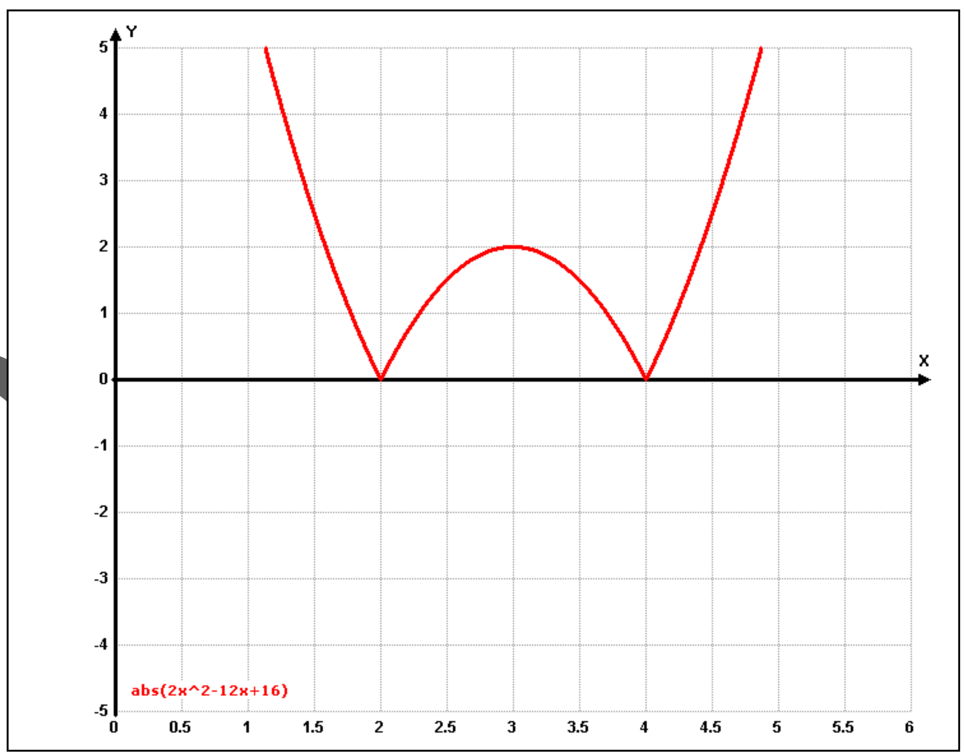
הגרף האדום הוא הפונקציה $y=|x|$, הגרף הכחול הפונקציה $y=|x-3|+1$.

7. פרבולה עם ערך מוחלט

בציור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $y = 2x^2 - 12x + 16$:



הגרף שלהלן מתאר את אותה הפונקציה בערך מוחלט: $y = \left|2x^2 - 12x + 16\right|$.



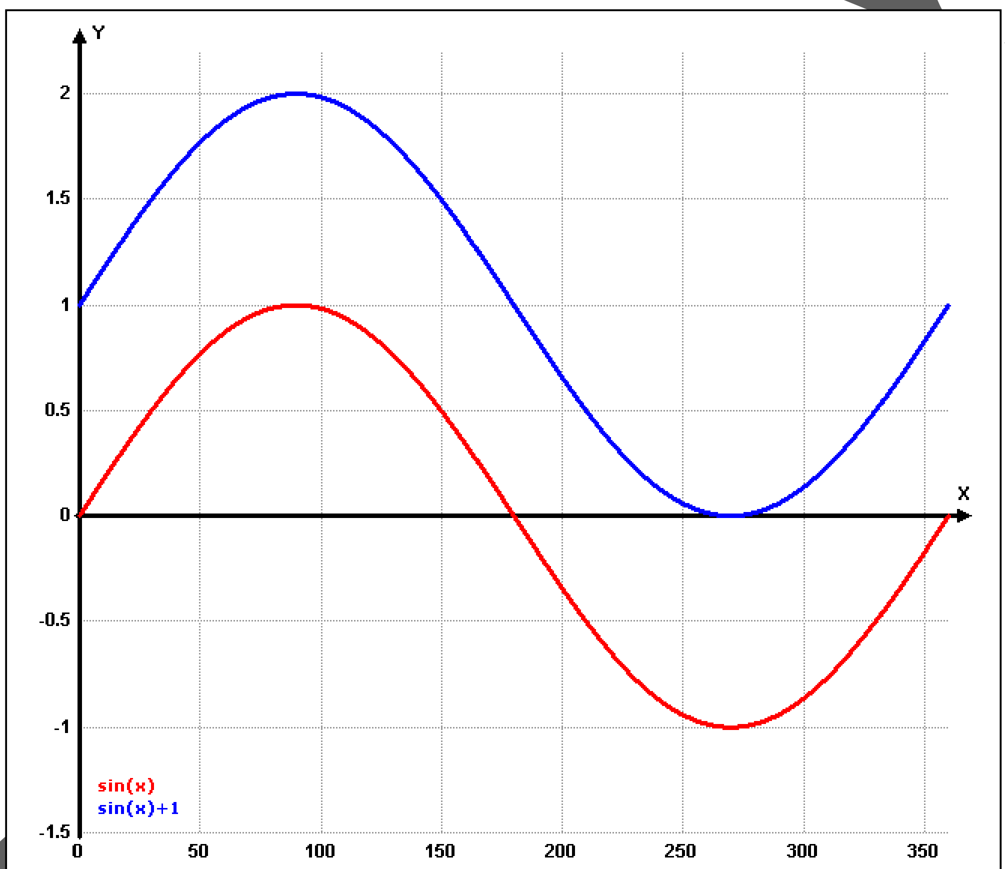
הערה: אם רוצים להעביר משיק בנקודה הנמצאת בתחום $2 < x < 4$ יש להשתמש בפונקציה $y = -\left(2x^2 - 12x + 16\right)$

8. <u>פונקציות טריגונומטריות (הזזה, מתיחה וכיווץ):</u>

א. המחזור של הפונקציות $\sin x$ ו- $\cos x$ הוא 360° ושל הפונקציות tgx ו- $\cot x$ הוא 180°.

ב. באופן כללי מחזוריות של פונקציה מוגדרת: $f(x+T)=f(x)$ כאשר T הוא המחזור.
לא כל פונקציה היא מחזורית (רק אלו מביניהן שמתקיימות את ההגדרה הנ"ל).

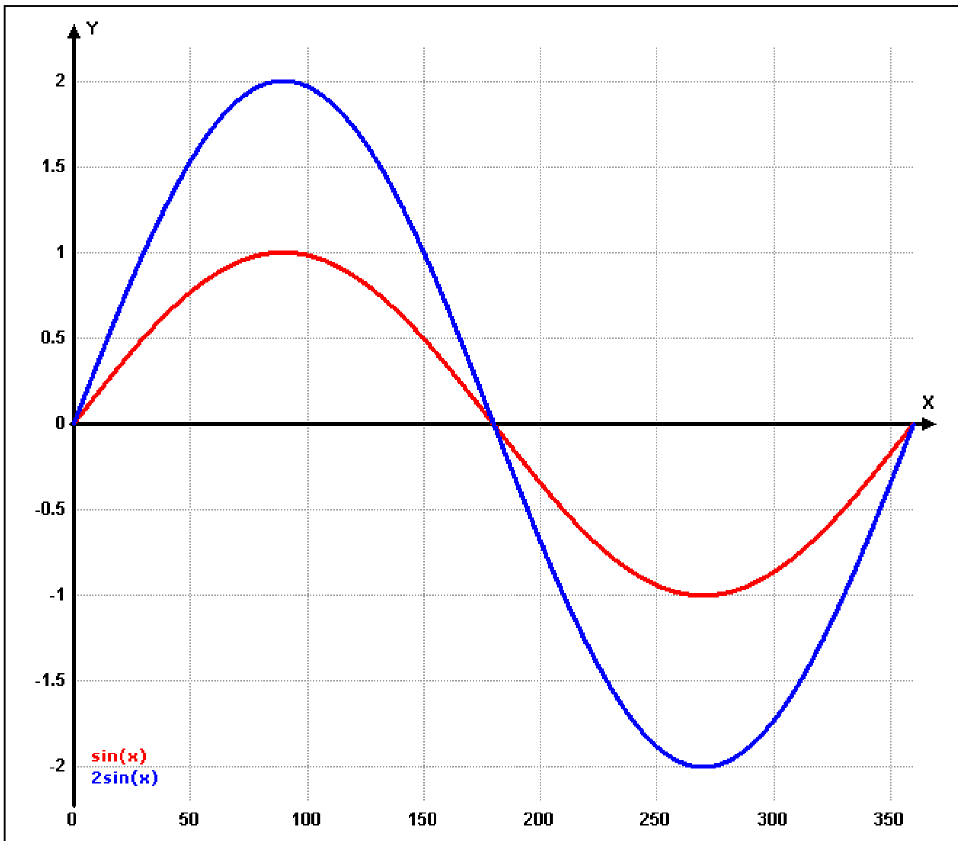
ג. כאשר נרצה להזיז את הפונקציה למשל $y=\sin x$ כלפי מעלה ב- m יחידות, נקבל את הפונקציה המוזזת $y=\sin x+m$. $(m>0)$. כמו שנעשה עם הפרבולה ואחרים.
הזזה זו אינה משנה את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה, אינה משנה את סוג הקיצון, ואינה משנה את תחומי העלייה והירידה.



הגרף האדום הוא: $y=\sin x$, והגרף הכחול הוא: $y=\sin x+1$.

ד. כאשר נרצה למתוח את הפונקציה למשל $y = sinx$ פי m, נקבל את הפונקציה $y = msinx$.
כאשר $m > 1$ ערכי ה-y המוכפלים פי m גורמים למתיחה של גרף הפונקציה המקורי.
כאשר $0 < m < 1$ ערכי ה-y המוכפלים פי m גורמים לכיווץ של גרף הפונקציה המקורי.

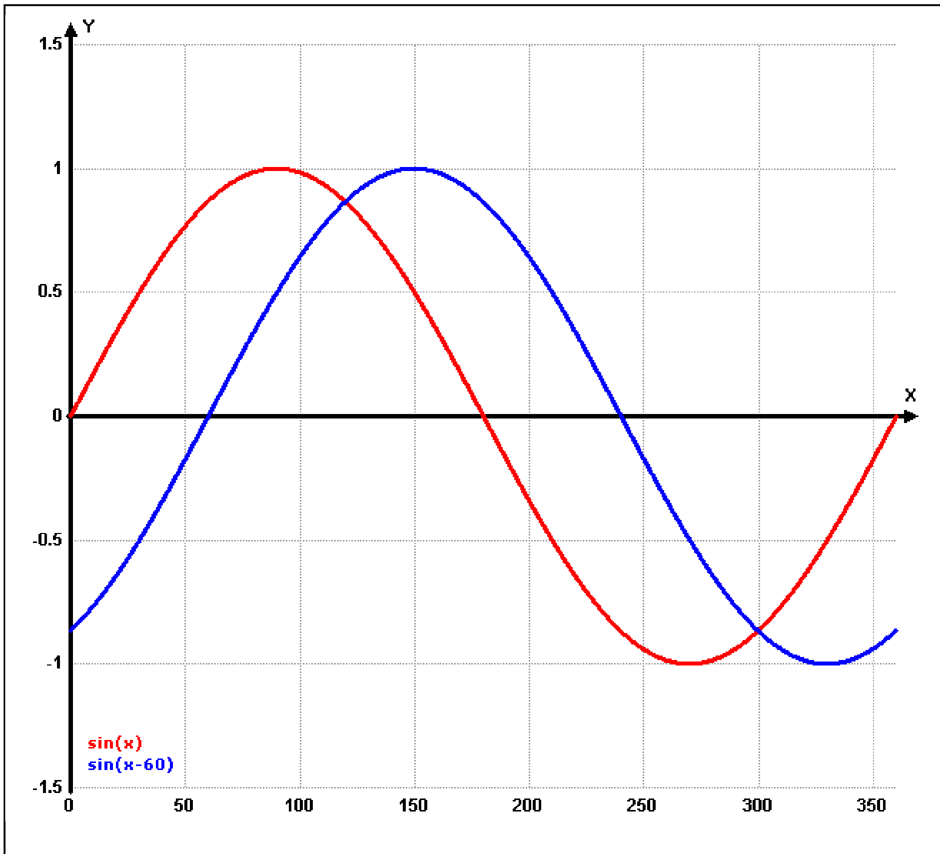
הכפלה פי m אינה משנה את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה, אינה משנה את סוג הקיצון, ואינה משנה את תחומי העלייה והירידה.



הגרף האדום הוא: $y = sinx$, והגרף הכחול הוא: $y = 2sinx$

ה. כאשר נרצה להזיז את הפונקציה למשל $y = \sin x$ ימינה ב- m יחידות, נקבל את הפונקציה המוזזת: $y = \sin(x - m)$.

הזזה ימינה או שמאלה אינה משנה את שיעורי ה – y של נקודות הקיצון.

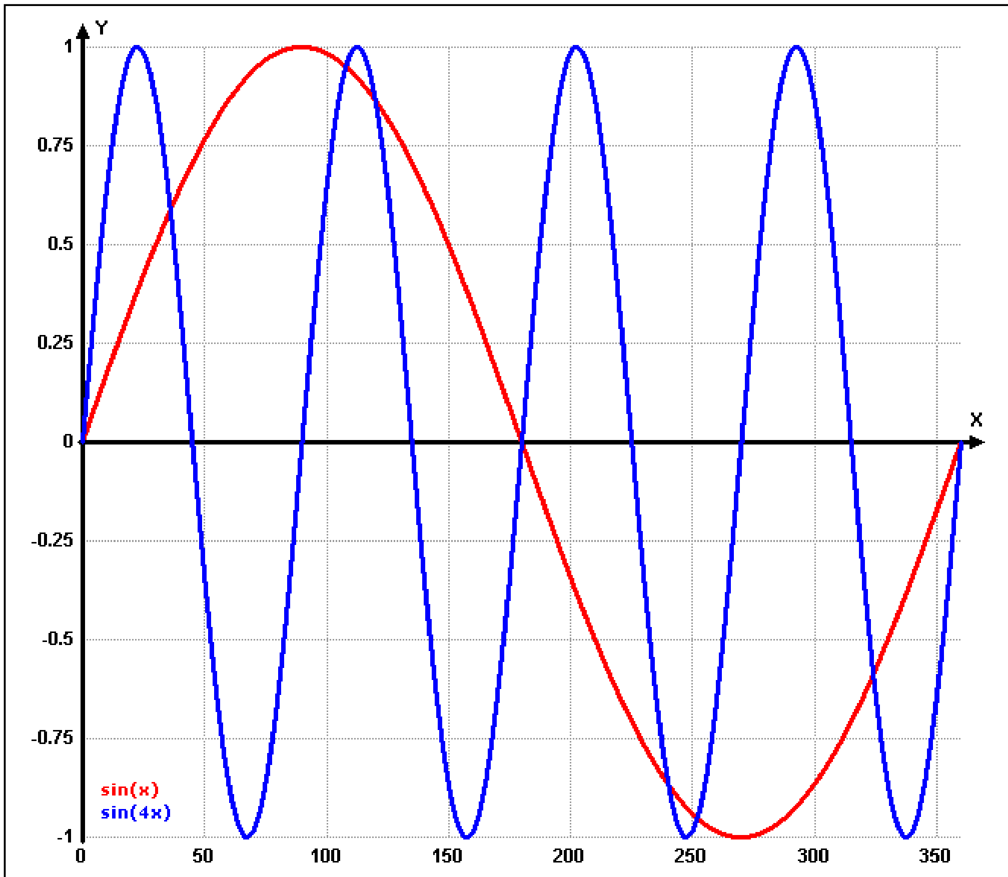


הגרף האדום הוא: $y = \sin x$, והגרף הכחול הוא: $y = \sin(x - 60^{\circ})$.

בוצעה הזזה של גרף הפונקציה המקורית ב - 60° ימינה.

ו. המחזוריות של הפונקציה $y=\sin(x)$ היא 360° ושל הפונקציה $y=\sin(mx)$ היא $\frac{360^\circ}{m}$.

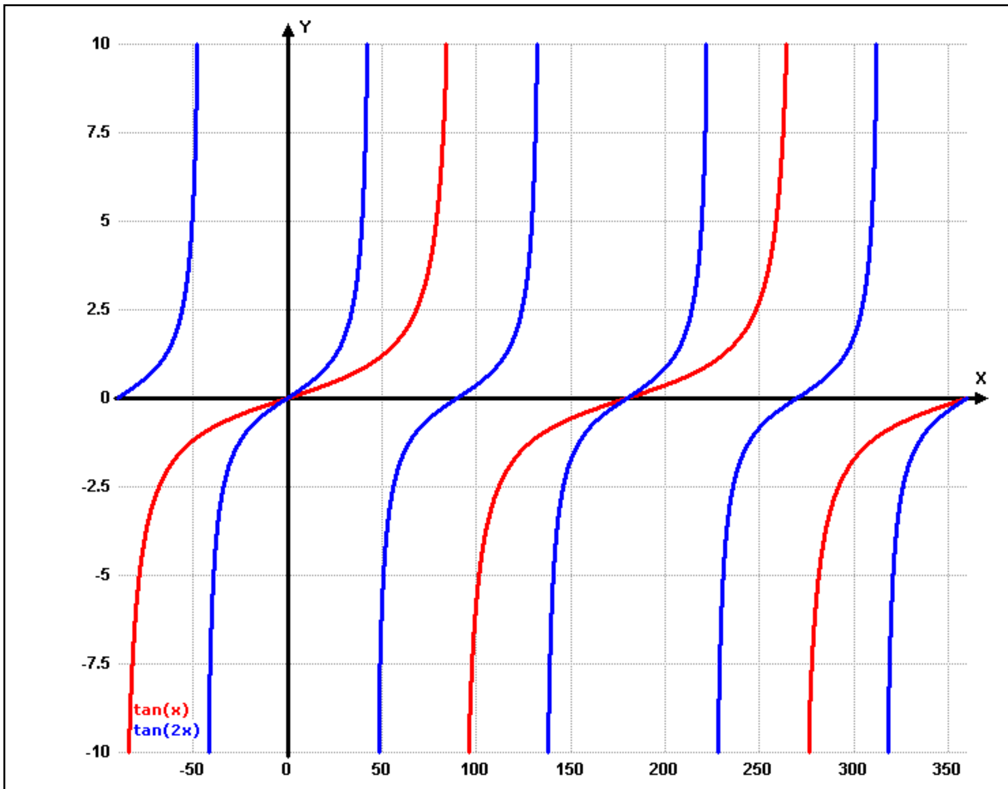
כאשר $m>1$ המחזוריות של הפונקציה תקטן, וכאשר $0<m<1$ המחזוריות של הפונקציה תגדל.



הגרף **האדום** הוא: $y=\sin x$ מחזור של 360°.

הגרף **הכחול** הוא: $y=\sin 4x$ המחזור הוא 90°. ($\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$)

ז. המחזוריות של הפונקציה $y = tg(x)$ היא 180° ושל הפונקציה $y = tg(mx)$ היא $\frac{180^\circ}{m}$.
כאשר $m > 1$ המחזוריות של הפונקציה תקטן, וכאשר $0 < m < 1$ המחזוריות של הפונקציה תגדל.



הגרף האדום הוא: $y = tgx$, מחזור של 180°

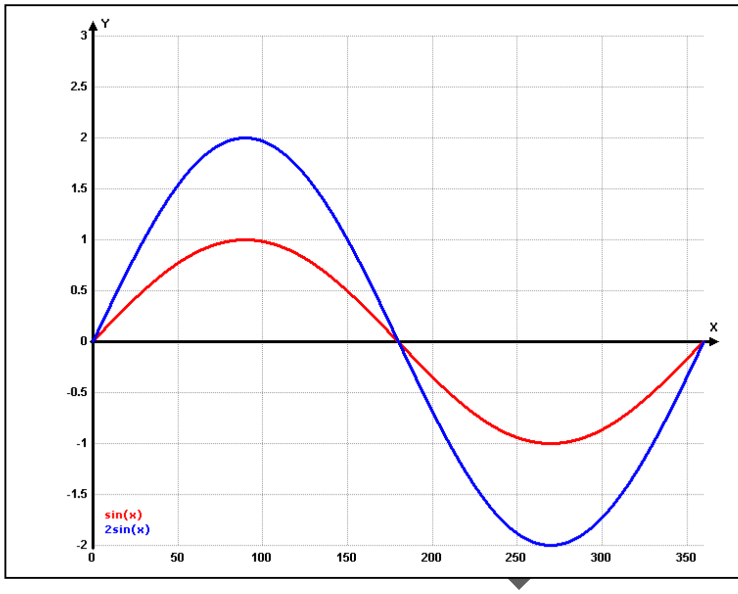
הגרף הכחול הוא: $y = tg(2x)$, מחזור של $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

ח. ניתן לשלב בין האפשרויות השונות - למשל גם להזיז, גם למתוח, וגם לשנות את המחזוריות.

ניקח לדוגמא את הפונקציה המקורית: $y = \sin x$, נבצע עליה מספר פעולות ונגיע לפונקציה הסופית: $y = 2\sin(x - 30) + 0.5$: (ללא שינוי המחזוריות שלה).

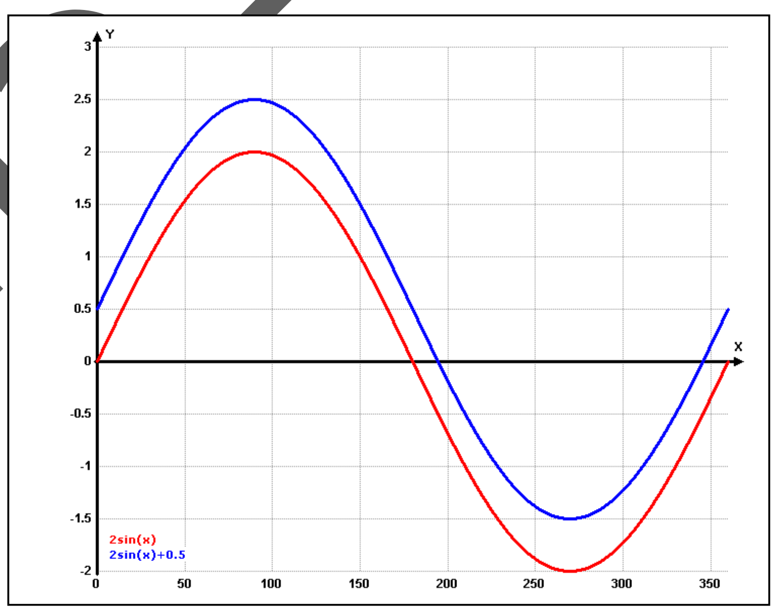
נראה את התהליך בשלבים:

<u>שלב ראשון:</u> נמתח את הפונקציה המקורית פי 2 ונקבל $y = 2\sin x$:



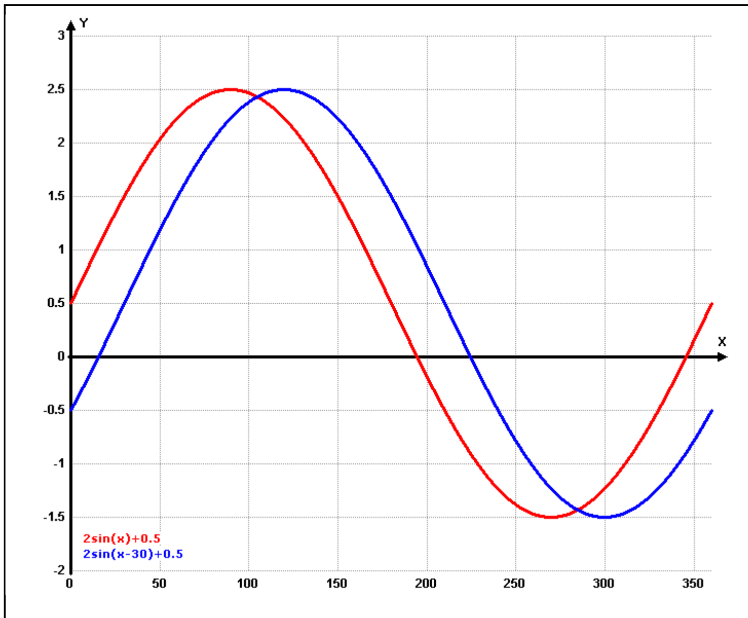
הגרף האדום הוא: $y = \sin x$, והגרף הכחול הוא: $y = 2\sin x$.

<u>שלב שני:</u> נבצע הזזה כלפי מעלה ב- 0.5 ונקבל $y = 2\sin x + 0.5$.



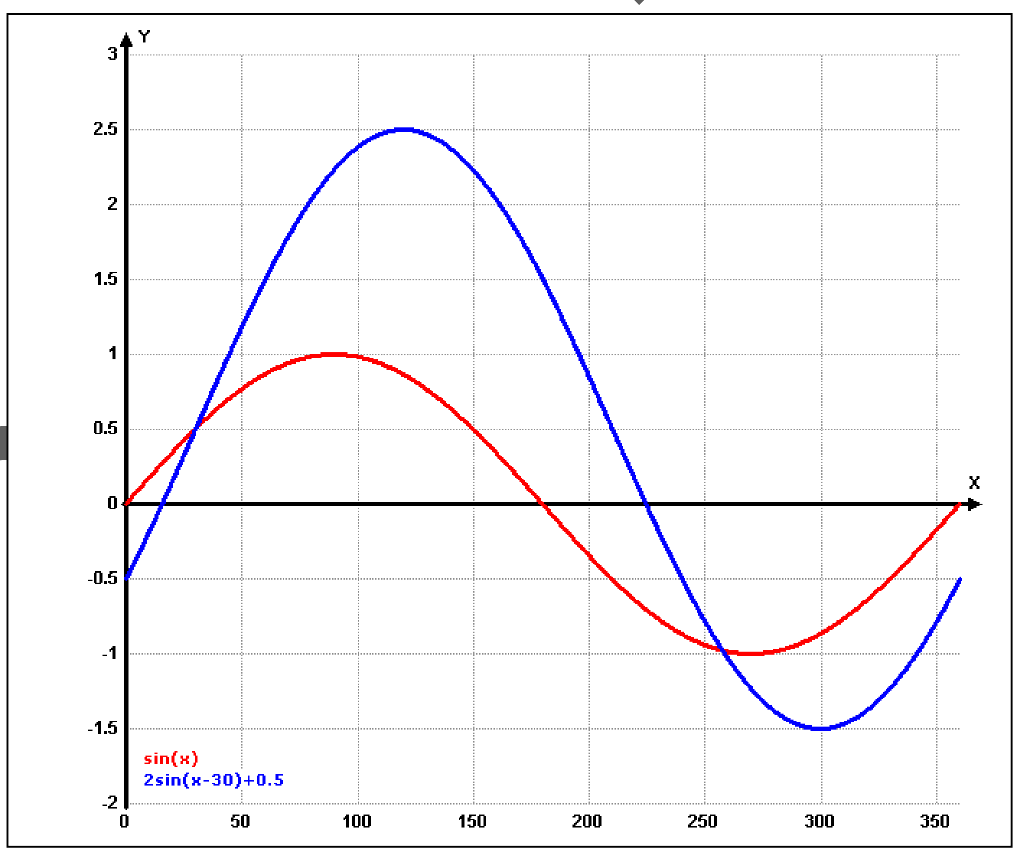
הגרף האדום הוא: $y = 2\sin x$, והגרף הכחול הוא: $y = 2\sin x + 0.5$.

<u>שלב שלישי:</u> נבצע הזזה ימינה ב- 30° ונקבל את הפונקציה הסופית: $y = 2\sin(x-30)+0.5$:



הגרף **האדום** הוא: $y = 2\sin x + 0.5$, והגרף **הכחול** הוא: $y = 2\sin(x-30)+0.5$.

המעבר הישיר מהפונקציה המקורית $y = \sin x$ לפונקציה הסופית $y = 2\sin(x-30)+0.5$ נראה כך:

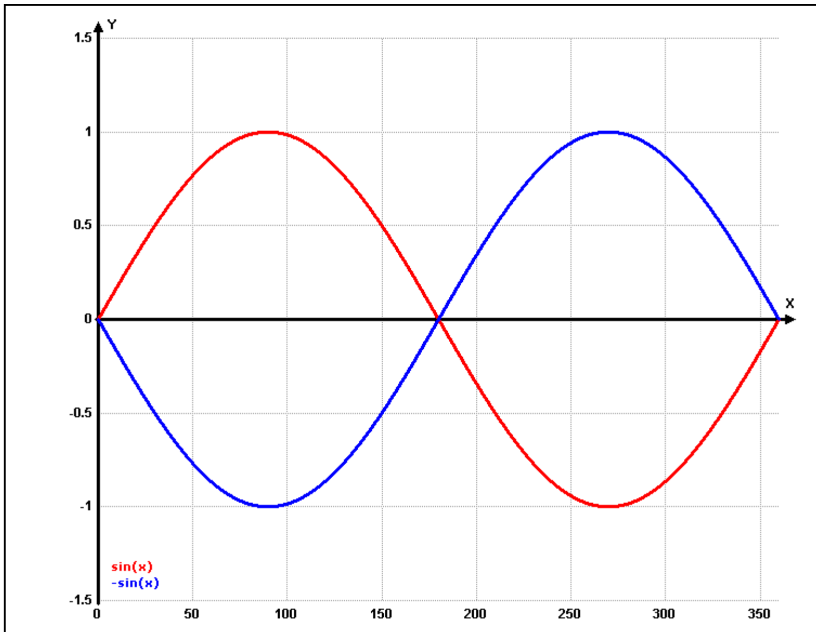


הגרף **האדום** הוא הפונקציה המקורית $y = \sin x$, והגרף **הכחול** הוא: $y = 2\sin(x-30)+0.5$.

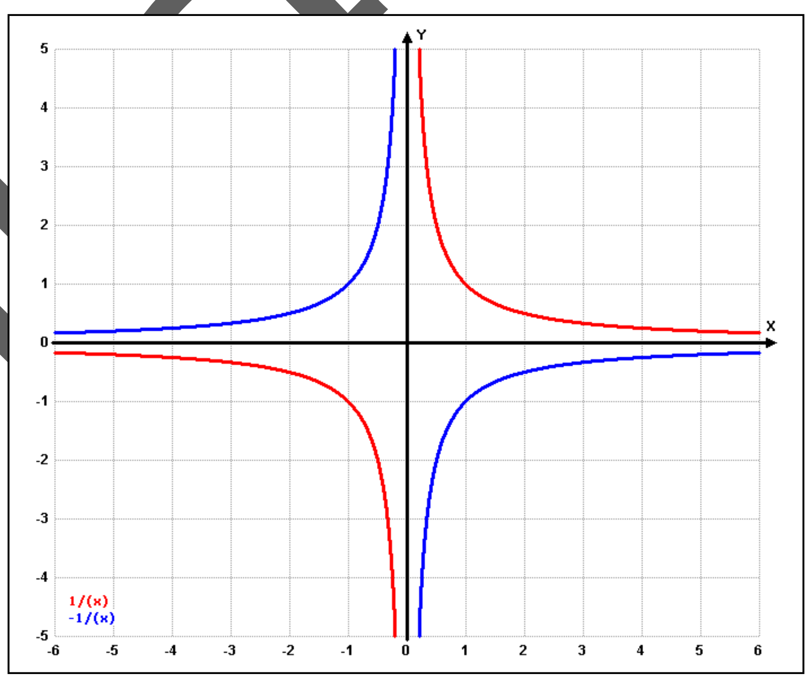
9. הכפלת הפונקציה המקורית ב (-1) והשפעתה על גרף הפונקציה:

הכפלה של פונקציה ב (-1) יוצרת גרף שהוא תמונת מראה ביחס לציר ה- x של גרף הפונקציה המקורית:

<u>להלן שתי דוגמאות</u>



הגרף האדום הוא הפונקציה $y=\sin x$, והגרף הכחול הוא: $y=-\sin x$.



הגרף האדום הוא הפונקציה $y=\frac{1}{x}$, והגרף הכחול הוא: $y=-\frac{1}{x}$.

<u>שימו לב!</u>

במסגרת נושא זה ניתן להוסיף סעיף בשאלה של חקירת הפונקציה $f(x)$ (אחרי סעיף שרטוט הסקיצה של הפונקציה $f(x)$):

<u>דוגמא א':</u>

נתונה הפונקציה $g(x)$ המוגדרת: $g(x)=a\cdot f(x)+b$, בנוסף נתונים המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של $g(x)$, יש למצוא את הפונקציה $g(x)$ כאשר $a>0$.

שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ ושל הפונקציה $g(x)$ יהיו זהות:

$$g'(x)=a\cdot f'(x).$$

$$g'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=0.$$

היות ונתון $a>0$ סימן ערך הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ יהיה זהה לסימן ערך הנגזרת של הפונקציה $g(x)$. $f'(x)>0 \quad\Rightarrow\quad g'(x)>0.$

ולכן שיעורי ה-x של נקודות המקסימום בשתי הפונקציות יהיו זהות כנ"ל לגבי נקודות המינימום.

באמצעות הנתונים של המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה $g(x)$ ניתן בעזרת מערכת משוואות למצוא את הנעלמים a ו- b. (כל תוצאה של a הסותרת את הנתון $a>0$ יש לפסול אותה).
הקשר בין ערכי שתי הפונקציות: $g(x)=a\cdot f(x)+b.$

כאשר $a<0$:
ההבדל הוא שנקודות הקיצון יהיו הפוכות – נקודת המקסימום של $f(x)$ תהיה נקודת המינימום של $g(x)$ ולהיפך.

<u>דוגמא ב':</u>

נתונה הפונקציה $g(x)$ המוגדרת: $g(x)=a\cdot f(x)+b$, $a>0$. בנוסף נתון שהישרים $y=0.5$, $y=2.5$ משיקים לפונקציה $g(x)$, מצא את הפרמטרים a ו- b.

כמו בדוגמא הקודמת נפתור מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים על מנת למצוא את הנעלמים a ו-b.

$$g(x_0)=a\cdot f(x_0)+b=0.5.$$
$$g(x_1)=a\cdot f(x_1)+b=2.5.$$

x_0 - שיעור ה-x של נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.

x_1 - שיעור ה-x של נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$.

ולסיום:-

זכרו כי המסמך בא לתת לכם רק הנחיות כלליות ותזכורת לחומר הלימוד ואינו פותר אתכם מחזרה ותרגול של כל החומר!

בהצלחה בבחינה!!!