1

א. סוחר קנה 200 שעונים זהים במחיר כולל של 5,000 שקלים,

כלומר שילם על כל שעון 25 שקלים $= 5000:200$.

כדי להרוויח 18% ממחיר השעון, עליו למכור אותו במחיר של 118% מעלות הקנייה.

כלומר, במחיר של 29.5 שקלים $= 1.18\cdot 25$.

תשובה: 29.5 שקלים.

ב. 10 שעונים נפגמו והסוחר מכר אותם בהפסד של 20% לשעון,

כלומר תמורת 20 שקלים $= 0.8\cdot 25$ לשעון, וקיבל תמורת כל 10 השעונים 200 שקלים.

הרווח של המוכר לאחר שמכר את כל השעונים היה 18%.

כלומר הוא קיבל תמורת כל השעונים 5,900 שקלים $= 1.18\cdot 5000$.

מכאן, שהתמורה עבור השעונים שלא נפגמו היא 5,700 שקלים $= 5900-200$.

המחיר עבור כל אחד מ- 190 השעונים התקינים היה 30 שקלים $= 5700:190$.

כזכור... הוא שילם על כל שעון 25 שקלים ולכן הרווח לכל שעון היה 5 שקלים $= 30-25$.

5 שקלים מהווים $\frac{5}{25}=0.2$ ממחיר הקנייה, או 20% ממחיר הקנייה.

על פי הנתון , את שאר השעונים, מכר הסוחר ברווח של P% לשעון.

תשובה: $P=20$.

א. מעגל שמרכזו M ברביע הרביעי, משיק לציר ה- x, בנקודה $A(3,0)$.

רדיוס המעגל מאונך למשיק בנקודת ההשקה, ולכן $x_M = x_A = 5$.

רדיוס המעגל הוא 5, ולכן $y_M = y_A - 5 = 0 - 5 = -5$, ושיעורי מרכז המעגל הם $(3,-5)$.

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-3)^2+(y+5)^2 = 25$.

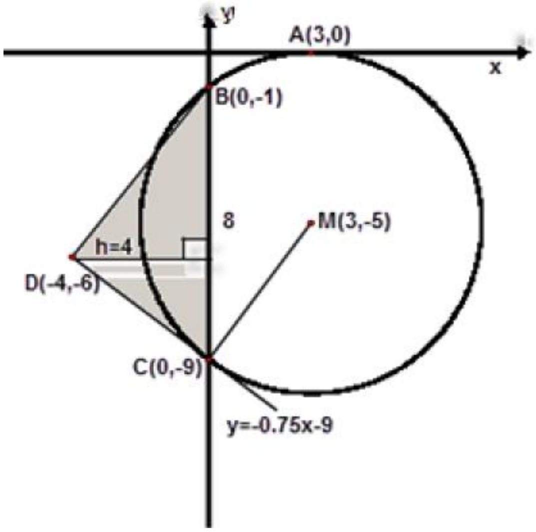
ב. המעגל חותך את ציר ה- y בנקודות B ו- C, לכן $x_B = x_C = 0$.

נציב $x=0$ במשוואת המעגל:

$$\begin{aligned}
&(0-3)^2+(y+5)^2 = 25\\
&(y+5)^2 = 16\\
&y+5=4 \quad \to y=-1 \quad \to B(0,-1)\\
&y+5=-4 \quad \to y=-9 \quad \to C(0,-9)\\
&BC = y_B - y_C - = -1-(-9) = 8
\end{aligned}$$

תשובה: $BC = 8$.

ג. D היא נקודה ברביע השלישי, כך ש- DC משיק למעגל.



(1) נמצא את משוואת הישר DC.

המשיק DC מאונך לרדיוס CM בנקודת ההשקה $C(0,-9)$.

$$\begin{aligned}
&m_{CM} = \frac{-9-(-5)}{0-3} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}\\
&m_{CM}\cdot m_{CD} = -1 \quad \leftarrow CM \perp CD\\
&\frac{4}{3}\cdot m_{CD} = -1 \quad \to m_{CD} = -0.75\\
&y-(-9) = -0.75(x-0)\\
&\boxed{y = -0.75x-9}
\end{aligned}$$

תשובה: משוואת הישר DC היא $y = -0.75x - 9$.

(2) נתון $S_{\Delta BCD} = 16$. הצלע BC מונחת על ציר ה- y, לכן הגובה h_{BC} מאונך לציר ה- y.

$$\begin{aligned}
&S_{\Delta BCD} = \frac{BC\cdot h_{BC}}{2}\\
&16 = \frac{8\cdot h_{BC}}{2}\\
&h_{BC} = 4
\end{aligned}$$

D היא נקודה ברביע השלישי, לכן $x_D < 0$ ומכאן ש- $x_D = -4$.

נציב $x_D = -4$ במשוואת הישר $y = -0.75x - 9$.

$$y = -0.75\cdot(-4) - 9 = -6 \quad \to D(-4,-6)$$

תשובה: שיעורי הנקודה D הם $(-4,-6)$.

בכד א יש 8 כדורים אדומים ו– 4 כדורים צהובים

בכד ב יש 4 כדורים אדומים ו– 8 כדורים צהובים

א. מוציאים באקראי כדור מכד א 5 פעמים (עם החזרה).

נחשב את המאורע "הוצאת כדור אדום, מכד א', בדיוק 4 פעמים" בעזרת נוסחת ברנולי.

זו התפלגות בינומית, כאשר $n=5$, $p=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$, $k=4$.

$$P_5(4)=\binom{5}{4}(\frac{2}{3})^4(1-\frac{2}{3})^{5-4}$$

$$P_5(4)=\frac{5!}{4!(5-4)!}\cdot(\frac{2}{3})^4\cdot(\frac{1}{3})^1$$

$$P_5(4)=5\cdot(\frac{2}{3})^4\cdot(\frac{1}{3})$$

$$P_5(4)=\frac{80}{243}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{80}{243}$.

ב. כעת מטילים קובייה מאוזנת.

אם מתקבל המספר 6 (הסתברות $\frac{1}{6}$**) מוציאים באקראי כדור מכד א 5 פעמים (עם החזרה).**

אם מתקבל מספר שונה מ- 6 (הסתברות $\frac{5}{6}$**) מוציאים באקראי כדור מכד ב 5 פעמים (עם החזרה).**

(1) נחשב, תחילה, את המאורע "הוצאת כדור אדום, מכד ב' בדיוק 4 פעמים" בעזרת נוסחת ברנולי.

זו התפלגות בינומית, כאשר $n=5$, $p=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, $k=4$.

$$P_5(4)=\binom{5}{4}(\frac{1}{3})^4(1-\frac{1}{3})^{5-4}$$

$$P_5(4)=5\cdot(\frac{1}{3})^4\cdot(\frac{2}{3})$$

$$P_5(4)=\frac{10}{243}$$

ועתה נחשב את ההסתברות למאורע "הוצאת כדור אדום בדיוק 4 פעמים מהכד שנבחר בעזרת הקובייה".

$$P_5(4)=\frac{1}{6}\cdot\frac{80}{243}+\frac{5}{6}\cdot\frac{10}{243}=\frac{65}{729}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{65}{729}$.

(2) ידוע כי הוצא כדור אדום בדיוק 4 פעמים.

יש לחשב את ההסתברות (המותנית) שבהטלת הקובייה התקבל המספר 6.

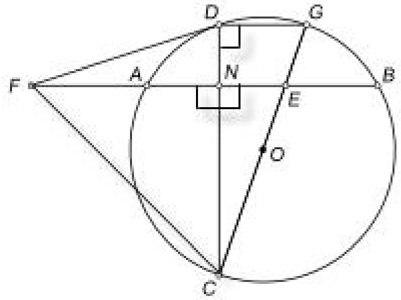
כלומר הכדורים האדומים שהוצאו, בדיוק 4 פעמים, הוצאו מכד א.

$$p(kad\ \ A/4\text{ red balls})=\frac{P(kad\ \ A\cap 4\text{ red balls})}{P(4\text{ red balls})}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{80}{243}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{80}{243}+\frac{5}{6}\cdot\frac{10}{243}}=\frac{8}{13}$$

(במטרה להמחיש את ההסתברות המותנית, נרשם המכנה בצורה זו – ולא הועתק ישירות מתשובת ב (1)).

תשובה: ההסתברות היא $\frac{8}{13}$.

4



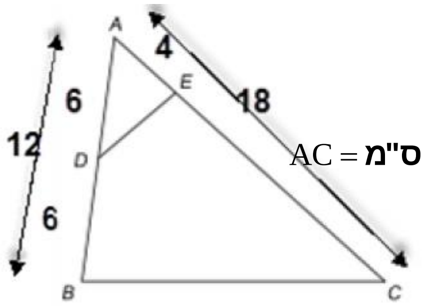
נתונים

.1 $AB \perp CD$ **.2** CG **קוטר .3** FD **משיק ב-** D

עבור ב. .4 ΔFNC **שווה שוקיים**

צ"ל: א. $\measuredangle FDN = \measuredangle NEC$ **ב** $\Delta FDN \cong \Delta CEN$

הסבר		טענה	נימוק
1	5	$AB \perp CD$	נתון
5	6	$\measuredangle ENC = \measuredangle FNC = 90°$	ישרים מאונכים יוצרים זווית ישרה
2	7	CG קוטר	נתון
7	8	$\measuredangle GDC = 90°$	זווית היקפית הנשענת על הקוטר היא ישרה
8 ,6	9	$\measuredangle GDC = \measuredangle ENC$	כלל המעבר
9	10	$DG \parallel NE$	אם זוויות מתאימות שוות אז הישרים מקבילים
10	11	$\measuredangle NEC = \measuredangle G$	אם ישרים מקבילים אז הזוויות המתאימות שוות
3	12	FD משיק ב- D	נתון
12	13	$\measuredangle FDN = \measuredangle G$	זווית בין משיק למיתר
13 ,11	14	$\measuredangle FDN = \measuredangle NEC$	כלל המעבר
מ.ש.ל. א			
4	15	ΔFNC שווה שוקיים	נתון
15 ,6	16	$FN = NC$ (צ)	היתר הוא הצלע הארוכה במשולש ישר זווית
	17	$\measuredangle DNF = \measuredangle ENC$ (ז)	זוויות קדקודיות שוות זו לזו
17 ,14	18	$\measuredangle DFN = \measuredangle ECN$ (ז)	סכום זוויות במשולש 180°
18 ,16 ,17	19	$\Delta FDN \cong \Delta CEN$	משפט חפיפה זווית צלע זווית
מ.ש.ל. ב			



נתונים

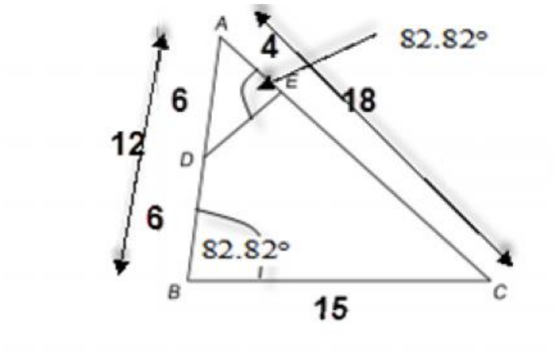
1. $AD = DB$ 2. $AB = 12$ ס"מ 3. $AC = 18$ ס"מ

4. $AE = 4$ ס"מ

עבור ב. 5. $BC = 15$ ס"מ

צ"ל: א. $\Delta AED = \Delta ABC$ ב. רדיוס המעגל החוסם את ΔAED

הסבר		טענה	נימוק
1	6	$AD = DB$	נתון
2	7	$AB = 12$ ס"מ	נתון
6, 7	8	$AD = 6$ ס"מ	חישוב
3	9	$AC = 18$ ס"מ	נתון
4	10	$AE = 4$ ס"מ	נתון
8, 10	11	$\frac{AD}{AE} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$	חישוב
7, 9	12	$\frac{AC}{AB} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$	חישוב
11, 12	13	$\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$	כלל המעבר
	14	$\sphericalangle A = \sphericalangle A$	זווית משותפת
13, 14	15	$\Delta AED = \Delta ABC$	משפט דמיון צלע זווית צלע
מ.ש.ל. א			



ב. נמצא את $\sphericalangle B$ במשולש ABC , באמצעות משפט הקוסינוסים.

נתון גם $BC = 15$ ס"מ .

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \sphericalangle B$$

$$18^2 = 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cdot \cos \sphericalangle B$$

$$-45 = -360 \cos \sphericalangle B \quad / : (-360)$$

$$0.125 = \cos \sphericalangle B$$

$$\boxed{\sphericalangle B = 82.82^\circ}$$

לכן גם $\sphericalangle AED = 82.82^\circ$ (זוויות מתאימות במשולשים דומים, על פי סעיף א')

נמצא את רדיוס המעגל החוסם את משולש ADE , באמצעות משפט הסינוסים במשולש זה.

$$\frac{AD}{\sin \sphericalangle AED} = 2R$$

$$\frac{6}{2 \cdot \sin 82.82^\circ} = R$$

$$\boxed{R = 3.024\ cm}$$

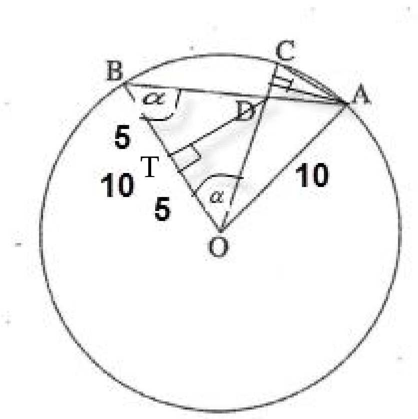
תשובה: רדיוס המעגל החוסם את משולש ADE הוא 3.024 ס"מ.

א. 10 **ס"מ** $= OA$ **,** $\sphericalangle DOB = \sphericalangle DBO = \sim$ **(נתון).**

10 **ס"מ** $= OB = OC$ **(רדיוסים שווים במעגל שמרכזו** O **)**

$BD = OD$ **,** ΔBDO **שווה שוקיים (אם שתי זוויות שוות אז המשולש שווה שוקיים)**

$DT \perp BO$ **(בניית עזר)**



$OT = \frac{OB}{2} = \frac{10}{2} = 5$ **ס"מ (הגובה לבסיס במש"ש הוא גם תיכון)**

ΔDTO

$$\cos\sim = \frac{OT}{OD}$$

$$\boxed{OD = \frac{5}{\cos\sim}}$$

תשובה: הוכַח.

ב. ל- ΔAOD **ול-** ΔAOC **יש גובה משותף לצלעות** OD **ו-** DC **בהתאמה.**

$$\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta AOC}} = \frac{0.5 \cdot OD \cdot h}{0.5 \cdot DC \cdot h} = \frac{OD}{OC}$$

$$\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta AOC}} = \frac{OD}{OC}$$

$$\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta AOC}} = \frac{5 / \cos\sim}{10}$$

$$\boxed{\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta AOC}} = \frac{1}{2\cos\sim}}$$

תשובה: $\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta AOC}} = \frac{1}{2\cos\sim}$

ג. נתון $\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta AOC}} = \frac{4}{5}$**.**

$$\frac{1}{2\cos\sim} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{5}{8} = \cos\sim$$

$$\boxed{\sim = 51.32^\circ} \quad \leftarrow 0 < \sim < 90^\circ$$

תשובה: $\sim = 51.32^\circ$ **.**

7

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{a-x}$ **,** $a>1$ **פרמטר.**

(1) תחום ההגדרה, ביטוי במכנה שונה מאפס.

תשובה: $x\neq a$ **.**

$x=a$ **אסימפטוטה מקבילה לציר ה-** y **: כי** $x=a$ **מאפס מכנה ולא מונה.**

$y=-1$ **אסימפטוטה מקבילה לציר ה-** x **: כי חזקת מונה** (1) **שווה לחזקת מכנה** (1) **,**

והפונקציה שואפת למנת המקדמים $\frac{1}{-1}=-1$ **, כאשר** $x\to\pm\infty$ **.**

תשובה: $x=a$ **,** $y=-1$ **.**

(3) נמצא את תחומי העלייה של הפונקציה.

$$f'(x)=\frac{1(a-x)-x(-1)}{(x-a)^2}$$

$$f'(x)=\frac{a-x+x}{(x-a)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{a}{(x-a)^2}}$$

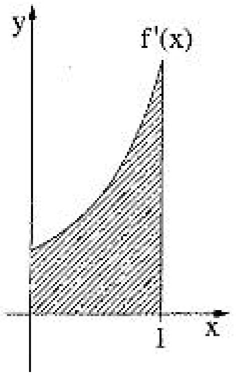
נתון כי $a>1$ **ולכן מונה הנגזרת חיובי. גם מכנה הנגזרת חיובי, לכל** $x\neq a$ **.**

תשובה: הפונקציה עולה עבור $x>a$ **או** $x<a$ **.**

ב. ניתן לראות שגרף הנגזרת חיובי לכל $x<a$ **, כי הפונקציה עולה גם בתחום זה.**

נתון ש- $a>1$ **וגרף הנגזרת מצויר עבור** $0\le x\le 1$ **.**

נחשב את גודל השטח האפור שנתון שהוא 1 **.**



$$S=\int_0^1 (\,f'(x)-0\,)dx$$

$$S=f(x)\Big]_0^1$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=1 & f(1)=\frac{1}{a-1} \\ x=0 & f(0)=\frac{0}{0-1}=0 \end{array}\right\} S=\frac{1}{a-1}$$

$$\frac{1}{a-1}=1$$

$$1=a-1 \quad \to \boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2$ **.**

א. לגרף הפונקציה $f(x)=-x^3$ מעבירים משיק בנקודה שבה $x=t$, שנמצאת ברביע הרביעי .

שיעורי נקודת ההשקה הם: $(t,-t^3)$.

נגזרת הפונקציה היא $f'(x)=-3x^2$,

ולכן שיפוע המשיק בנקודה $(t,-t^3)$ הוא $-3t^2$.

נמצא את משוואת המשיק:

$$y-(-t^3)=-3t^2(x-t)$$
$$y+t^3=-3t^2x+3t^3$$
$$\boxed{y=-3t^2x+2t^3}$$

תשובה: $y=-3t^2x+2t^3$.

ב. בנקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x=0$, ולכן $\mathrm{A}(0,2t^3)$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$.

$$0=-3t^2x+2t^3 \quad /:t^2>0$$
$$0=-3x+2t$$
$$3x=2t$$
$$x=\frac{2t}{3}$$

ולכן $\mathrm{B}(\frac{2t}{3},0)$.

$$\mathrm{OB}=\frac{2t}{3}-0=\frac{2t}{3}$$
$$\mathrm{OA}=2t^3-0=2t^3$$

נמצא לאיזה ערך של t מתקיים $\mathrm{OA}=3\cdot\mathrm{OB}$.

$$2t^3=3\cdot\frac{2t}{3}$$
$$2t^3=2t \quad /:2t>0$$
$$t^2=1$$
$$\boxed{t=1} \quad \leftarrow t>0$$

תשובה: $t=1$.

א. נתון שרדיוס המעגל הוא 10 ס"מ, לכן 10 ס"מ $\text{OB} =$.

נסמן $\text{BC} = x$.

זוויות המלבן ישרות, לכן $\measuredangle \text{BCO} = 90^\circ$.

על פי משפט פיתגורס ב- ΔBOC מתקיים:

$$(\text{OB})^2 = (\text{OC})^2 + (\text{BC})^2$$
$$10^2 = (\text{OC})^2 + x^2$$
$$100 - x^2 = (\text{OC})^2$$
$$\boxed{\text{OC} = \sqrt{100 - x^2}}$$

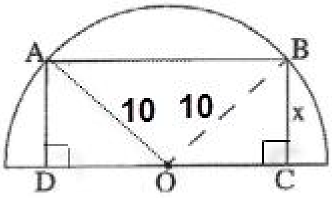
תשובה: $\text{OC} = \sqrt{100 - x^2}$.

א. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* **היא** *היקף המלבן* ABCD .

צלעות נגדיות שוות במלבן, וזוויות המלבן ישרות.

$\Delta\text{OCB} \cong \Delta\text{ODA}$ **על פי משפט חפיפה צלע צלע זווית מול הצלע הגדולה ביניהן.**

ולכן $\text{DO} = \text{OC}$ **ו-** $\text{DC} = 2\sqrt{100 - x^2}$



פונקציית היקף המלבן היא: $\boxed{f(x) = 2x + 4\sqrt{100 - x^2}}$

$$f'(x) = 2 + \frac{4 \cdot (-2x)}{2\sqrt{100 - x^2}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2\sqrt{100 - x^2} - 4x}{\sqrt{100 - x^2}}}$$

$$2\sqrt{100 - x^2} - 4x = 0$$
$$2\sqrt{100 - x^2} = 4x \quad / : 2$$
$$\sqrt{100 - x^2} = 2x$$
$$100 - x^2 = 4x^2$$
$$100 = 5x^2$$
$$20 = x^2$$

$$\boxed{x = \sqrt{20}} \quad (0 < x < \frac{10}{\sqrt{2}}) \quad \text{test} : -\sqrt{100 - (\sqrt{20})^2} = 2\sqrt{20} \quad \to \sqrt{80} = \sqrt{80} \quad o.k.$$

$$\left.\begin{aligned} f'(4) &= \frac{2\sqrt{100 - 4^2} - 4 \cdot 4}{+} = \frac{2.33}{+} > 0 \\ f'(5) &= \frac{2\sqrt{100 - 5^2} - 4 \cdot 5}{+} = \frac{-2.68}{+} < 0 \end{aligned}\right\} Max$$

תשובה: $\sqrt{20}$ **ס"מ** $x =$ **, עבורו היקף המלבן** ABCD **הוא מקסימלי.**