נסמן : x - מחיר המחברות שרמי קנה, ובהתאם $x+5$ מספר המחברות שיוסי קנה.
y - מחיר מחברת בקנייה של רמי (שקלים),

ובהתאם $\frac{(100-15)}{100}\cdot y=0.85y$ מחיר מחברת בקנייה של יוסי,

שקיבל הנחה של 15% על כל מחברת.

	כמות (מספר מחברות)	מחיר למחברת (שקלים)	סך הכול (שקלים)
קניית רמי	x	y	xy
קניית יוסי	$x+5$	$0.85y$	$0.85y(x+5)$

אילו רמי היה קונה מחברת אחת יותר, היה משלם 80 שקלים.

המשוואה המתאימה היא: $y(x+1)=80$.

יוסי שילם סך הכול 10 שקלים יותר מהסכום ששילם רמי עבור המחברות שקנה.

המשוואה המתאימה היא: $xy+10=0.85y(x+5)$.

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y(x+1)=80 \quad \rightarrow \boxed{y=\frac{80}{x+1}} \\ xy+10=0.85y(x+5) \end{cases}$$

$$x\cdot\frac{80}{x+1}+10=0.85(x+5)\cdot\frac{80}{x+1}$$

$$\frac{80x}{x+1}+10=\frac{68(x+5)}{x+1} \quad /\cdot(x+1)$$

$$80x+10(x+1)=68(x+5)$$

$$80x+10x+10=68x+340$$

$$22x=330 \quad /:22$$

$$\boxed{x=15} \quad \rightarrow y=\frac{80}{15+1} \quad \rightarrow \boxed{y=5}$$

רמי קנה 15מחברות, במחיר של 5 שקלים למחברות, ושילם בסך הכול 75 שקלים.

תשובה: הסכום ששילם רמי עבור המחברות שקנה הוא 75 שקלים.

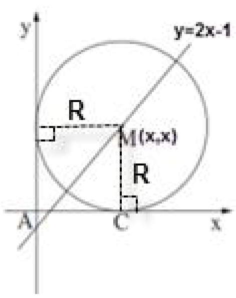
א. (1) נתון מעגל המשיק לצירים, ברביע הראשון על פי הציור.

לכן שיעור ה- x של מרכז המעגל שווה לשיעור ה- y של מרכז המעגל ושווה לרדיוס המעגל.

הסבר – המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

נסמן $\mathrm{M}(x, x)$. נתון גם שמרכז המעגל M מונח על הישר $y = 2x - 1$.

נציב את שיעורי הנקודה $\mathrm{M}(x, x)$ במשוואת הישר.

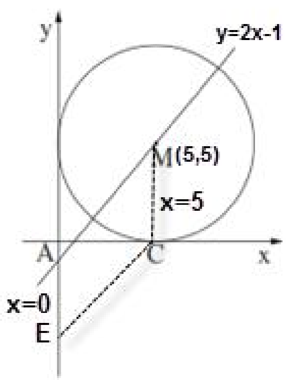


$$x = 1.2x - 1$$
$$-0.2x = -1 \quad / : -0.2$$
$$x_{\mathrm{M}} = 5 \quad \rightarrow y_{\mathrm{M}} = 5, R = 5$$

תשובה: $\mathrm{M}(5,5)$.

(2)משוואת המעגל היא $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.

ב. דרך הנקודה C העבירו ישר המקביל לישר AM.



כיוון ש- $x_{\mathrm{M}} = x_{\mathrm{C}} = 5$ **ו-** $x_{\mathrm{E}} = x_{\mathrm{A}} = 0$ **, הרי שגם** $\mathrm{AE} \parallel \mathrm{MC}$ **,**

ולכן המרובע AMCE הוא מקבילית (שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות).

שטח המקבילית הוא מכפלת צלע בגובה שלה, ובמקרה זה: $\mathrm{S}_{\mathrm{AMCE}} = \mathrm{MC} \cdot h_{\mathrm{MC}}$.

אורך הצלע MC שווה לרדיוס המעגל, כלומר 5.

הגובה לצלע זו, הוא המרחק בין הצלעות MC ו- AE ,

כלומר בין הישרים $x = 5$ **ו-** $x = 0$ **, והוא:** $h_{\mathrm{MC}} = 5 - 0 = 5$.

לכן: $\mathrm{S}_{\mathrm{AMCE}} = 5 \cdot 5 = 25$.

תשובה: שטח המקבילית AMCE הוא 25 יח"ר.

א. יוסי ואורי מתמודדים ביניהם במשחק שש-בש.

הסיכוי שיוסי ינצח במשחק בודד היא 0.5 .

יוסי ינצח בתחרות, שבה ששה משחקים,

אם ינצח בלפחות ארבעה משחקים, כלומר ארבעה, חמישה, או ששה משחקים.

זו התפלגות בינומית.

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי, כאשר נתון כי $n=6 \;,\; p=0.5$

$$P_6(4)=\binom{6}{4}(0.5)^4(1-0.5)^{6-4}$$
$$P_6(4)=\frac{6!}{4!(6-4)!}\cdot 0.5^4\cdot 0.5^2$$
$$P_6(4)=15\cdot 0.5^4\cdot 0.5^2$$
$$P_6(4)=\frac{15}{64}$$

$$P_6(5)=\binom{6}{5}(0.5)^5(1-0.5)^{6-5}$$
$$P_6(5)=\frac{6!}{5!(6-5)!}\cdot 0.5^5\cdot 0.5^1$$
$$P_6(5)=6\cdot 0.5^5\cdot 0.5$$
$$P_6(5)=\frac{3}{32}$$

$$P_6(6)=(0.5)^6$$
$$P_6(6)=\frac{1}{64}$$

$$P(Yossi\ will\ win)=P_6(4)+P_6(5)+P_6(6)$$
$$P(Yossi\ will\ win)=\frac{15}{64}+\frac{3}{32}+\frac{1}{64}$$
$$P(Yossi\ will\ win)=\frac{11}{32}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{11}{32}$.

ב. אחד מהשניים ינתח בתחרות, אם יהיה זה יוסי או רמי.

לשני השחקנים הסתברות שווה לנצי במשחק בודד, ולכן גם לנצח בתחרות כולה.

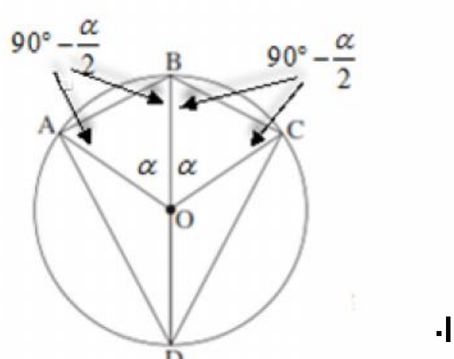
$$P(Yossi\ or\ Rami\ will\ win)=\frac{11}{32}+\frac{11}{32}$$
$$P(Yossi\ or\ Rami\ will\ win)=\frac{11}{16}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{11}{16}$.

ג. התחרות תסתיים בתיקו, אם אף אחד מהשחקנים *לא* ינצח בה.

$$P(Tie)=1-\frac{11}{16}$$
$$P(Tie)=\frac{5}{16}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{5}{16}$.



נתונים

1. O **מרכז המעגל.**

2. BD **קוטר.**

3. $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COB = \sim$ **.**

עבור ב: 4. $\sphericalangle AOC = 120°$

צ"ל: א. BD **חוצה זווית** ADC **.**

ב. (1) $\sphericalangle ABC$ **. (2)** ABCO **בר חסימה?** **ג.** ABCO **מעוין.**

הסבר		טענה	נימוק
1	5	O מרכז המעגל	נתון
3	6	$\sphericalangle AOB = \sphericalangle COB = \sim$	נתון
5, 6	7	$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$	זוויות מרכזיות שוות נשענות על קשתות שוות
2	8	BD קוטר	נתון
7, 8	9	BD חוצה זווית ADC	על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות
		מ.ש.ל. א	
5	10	$\Delta OBC, \Delta OBA$ שווי שוקיים $OA = OB = OC$	רדיוסים שווים במעגל
6, 10	11	$\sphericalangle ABO = \sphericalangle OAB = \sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB = 90 - 0.5\sim$	זוויות בסיס שוות במשולשים שווים שוקיים, וסכום זוויות במשולש הוא $180°$.
11	12	$\sphericalangle ABC = 180° - \sim$	סכום זוויות
		מ.ש.ל. ב (1)	
11	13	$\sphericalangle OAB + \sphericalangle OCB = 180° - \sim$	חישוב
13	14	ABCO אינו בר חסימה	סכום זוויות נגדיות אינו $180°$
		מ.ש.ל. ב (2)	
4	15	$\sphericalangle AOC = 120°$	נתון
6	16	$\sphericalangle AOB = \sphericalangle COB = 60°$	חישוב
10, 16	17	$\Delta OBC, \Delta OBA$ שווי צלעות $OA = AB = OB = BC = OC$	משולשים שווי שוקיים עם זווית ראש בת $60°$ (או ניתן להראות שכל הזוויות שוות ולכן משו"צ)
17	18	ABCO מעוין	מרובע שכל צלעותיו שוות זו לזו
		מ.ש.ל. ג	

א. $\sphericalangle ABC = 90°$ **(נתון), ולכן** AC **קוטר (מיתר שנשען על זווית היקפית ישרה).**

$AB = 8$ **ס"מ (נתון) .**

רדיוס המעגל הוא 5 **ס"מ ולכן** $AC = 10$ **ס"מ .**

$\underline{\Delta ABC}$

$$\cos\sphericalangle BAC = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos\sphericalangle BAC = \frac{8}{10}$$

$$\boxed{\sphericalangle BAC = 36.87°}$$

לכן גם $\boxed{\sphericalangle BDC = 36.87°}$ **, כי הן זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת,** $\overset{\frown}{BC}$ **.**

תשובה: $\sphericalangle BDC = 36.87°$ **.**

ב. $DC = 7$ **ס"מ (נתון) .**

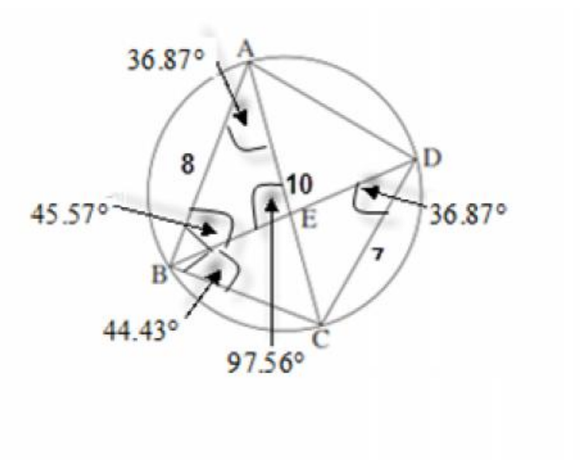
(1) ΔDBC **, לפי משפט סינוסים :**

$$\frac{DC}{\sin\sphericalangle DBC} = 2R$$

$$\frac{7}{10} = \sin\sphericalangle DBC$$

$$\boxed{\sphericalangle DBC = 44.43°} \quad \leftarrow 0° < \sphericalangle DBC < 90°$$

תשובה: $\sphericalangle DBC = 44.43°$ **.**



(2) $\sphericalangle ABE = 45.57°$ **(הפרש זוויות).**

$\sphericalangle AEB = 97.56°$ **(סכום זוויות** $180°$ ΔABE**).**

ΔABE **, לפי משפט סינוסים :**

$$\frac{AE}{\sin 45.57°} = \frac{AB}{\sin 97.56°}$$

$$AE = \frac{8\sin 45.57°}{\sin 97.56°}$$

$$\boxed{AE = 5.763\,cm}$$

תשובה: $AE =$ 5.763**ס"מ .**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=-x^2-2$.

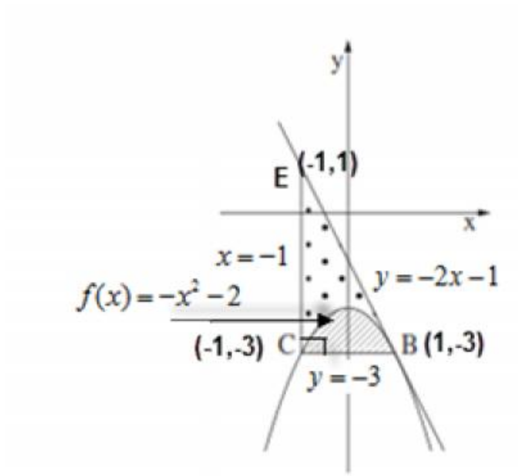
B **ו-** C **נקודות על גרף הפונקציה, כאשר** BC **מקביל לציר ה-** x .

גרף הפונקציה הוא פרבולה הפוכה, הסימטרית לציר ה- y ,

לכן: $y_B=y_C$ **ועקב הסימטריה לציר ה-** y **מתקיים** $x_C=-x_B$.

המשיק בנקודה B **מקביל לישר** $y=-2x+1$ **, ולכן** $y'=m=-2$.

$$f'(x)=-2x$$
$$-2=-2x \quad /:2$$
$$x=1 \quad \rightarrow f(1)=-1^2-2=-3$$
$$B(1,-3) \quad \rightarrow C(-1,-3)$$
$$B(1,-3),\ m=-2$$
$$y+3=-2(x-1)$$
$$\boxed{y=-2x-1}$$



תשובה: משוואת המשיק היא $y=-2x-1$.

ב. משוואת הישר BC **היא** $y=-3$.

משוואת האנך ל- BC **היא** $x=-1$.

נסמן ב- E **את נקודת החיתוך שלו עם המשיק** $y=-2x-1$ **, ובהתאם** $y_E=-2(-1)-1=1$.

$$S_1+S_2=S_{BCE}=\frac{BC\cdot EC}{2}=\frac{(1-(-1))\cdot(1-(-3))}{2}=\frac{2\cdot 4}{2}=4$$

$$S_1=\int_{-1}^{1}(-x^2-2-(-3))dx$$
$$S_1=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx$$
$$S_1=-\frac{x^3}{3}+x\Big]_{-1}^{1}$$
$$\left.\begin{array}{l} x=1:\quad -\frac{1^3}{3}+1=\frac{2}{3} \\ x=-1:\quad -\frac{(-1)^3}{3}+(-1)=-\frac{2}{3} \end{array}\right\} S_1=\frac{4}{3}$$

ובהתאם: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{4/3}{8/3}=\frac{1}{2} \quad \leftarrow \quad S_2=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$.

תשובה: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{2}$.

א. $f(x)$ **מוגדרת לכל** $x \neq 1$ **, ו-** $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$ **.**

הישר $y = 3$ **משיק לגרף הפונקציה** $f(x)$ **בנקודת המינימום שלה.**

בנקודת המינימום מתקיים $f'(x) = 0$ **.**

$$0 = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2} = 1 \quad / \cdot (x-1)^2 > 0$$

$$1 = (x-1)^2$$

$$1 = x - 1 \qquad -1 = x - 1$$

$$x = 2 \qquad x = 0$$

$$\left.\begin{matrix} f'(1.5) < 0 \\ f'(2.5) > 0 \end{matrix}\right\} x = 2 \quad \to (2,3)\min$$

$$\left.\begin{matrix} f'(-0.5) > 0 \\ f'(0.5) < 0 \end{matrix}\right\} x = 0, \max$$

תשובה: שיעורי נקודת המינימום הם $(2,3)$ **.**

ב. נמצא את הפונקציה הקדומה, את $f(x)$ **,**

כאשר שיעורי נקודת המינימום יאפשרו למצוא את קבוע האינטגרציה.

$$f'(x) = 1 - (x-1)^{-2}$$

$$f(x) = \int f'(x)dx$$

$$f(x) = \int (1 - (x-1)^{-2})dx$$

$$f(x) = x - \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x-1} + c$$

$$3 = 2 + \frac{1}{2-1} + c$$

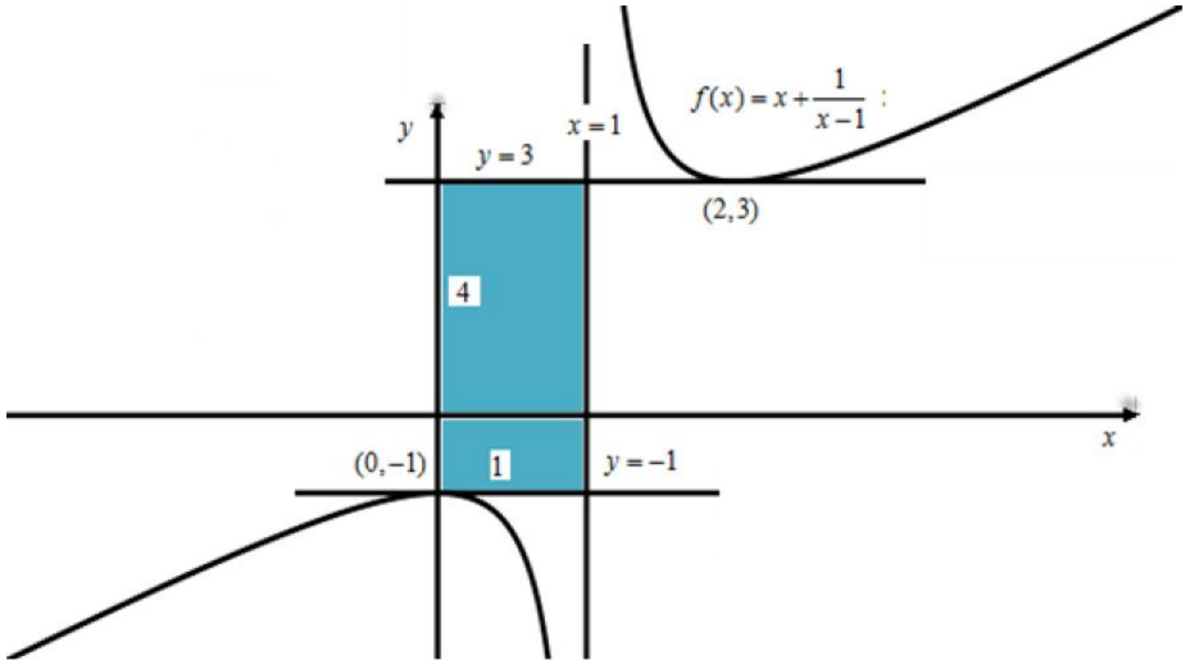
$$c = 0$$

$$\boxed{f(x) = x + \frac{1}{x-1}}$$

$$f(0) = 0 + \frac{1}{0-1} = -1 \quad \to \boxed{(0,-1)\max}$$

תשובה: $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ **, שיעורי נקודת המקסימום הם** $(0,-1)$ **.**

ג. להלן סקיצה של גרף הפונקציה, לרבות סימונים עבור סעיף ד.



ד. הישר, המקביל למשיק $y=3$ **, הוא** $y=-1$, **העובר בנקודת המקסימום של הפונקציה.**

המרחק בין האסימפטוטה האנכית, $x=1$ **, לציר ה-** y **, הוא** $1-0=1$**.**

המרחק בין שני הישרים, המקבילים לציר ה- x **, הוא** $3-(-1)=4$ **.**

שטח המלבן הנוצר הוא $4\cdot 1=4$ **.**

תשובה: שטח המלבן הוא 4 **יח"ר.**

א. נתון משולש שווה שוקיים, שהיקפו 30 ס"מ.

נסמן ב- $2x$ את אורך בסיס המשולש.

לכן, אורך כל שוק: $\frac{30-2x}{2}=15-x$.

תחום ההגדרה לבעיה זו הוא: $0<x<15$.

הגובה לבסיס במשולש שווה שוקיים הוא גם תיכון.

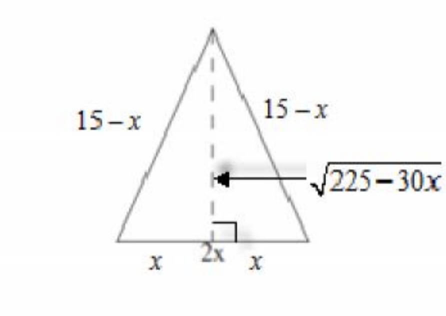
אורך חצי בסיס הוא x .

נמצא את אורך הגובה לבסיס באמצעות משפט פיתגורס:

$$h=\sqrt{(15-x)^2-x^2}$$

$$h=\sqrt{225-30x+x^2-x^2}$$

$$\boxed{h=\sqrt{225-30x}}$$



תשובה: הגובה לבסיס הוא $\sqrt{225-30x}$.

ב. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא *שטח המשולש*.

$$S(x)=\frac{2x\cdot\sqrt{225-30x}}{2}$$

$$\boxed{S(x)=x\cdot\sqrt{225-30x}}$$

נמצא את נקודת הקיצון:

$$S'(x)=\sqrt{225-30x}+\frac{x\cdot(-30)}{2\sqrt{225-30x}}$$

$$S'(x)=\frac{225-30x-15x}{\sqrt{225-30x}}$$

$$\boxed{S'(x)=\frac{225-45x}{\sqrt{225-30x}}}$$

$$0=225-45x \quad /+45x$$

$$45x=225 \quad /:45$$

$$\boxed{x=5} \quad 0<x<15 \quad o.k.$$

$$\left.\begin{aligned} S'(4)&=\frac{225-45\cdot 4}{+}>0 \\ S'(6)&=\frac{225-45\cdot 6}{+}<0 \end{aligned}\right\} x=5,\max$$

תשובה: עבור $x=5$ שטח המשולש יהיה מקסימלי.

ג. אורך בסיס המשולש: $2\cdot 5=10\,cm$, ואורך כל אחת מהשוקיים: $15-5=10\,cm$.

תשובה: עבור $x=5$ המשולש הוא שווה צלעות, שאורך כל אחת מצלעותיו 10 ס"מ.