א. נסמן ב- x את הזמן (בשעות) שהצינור הזרים מים עד ההפסקה.

פועל	הספק לשעה (מ"ק לשעה)	זמן (שעות)	עבודה (מ"ק כולל)
עד ההפסקה	$\frac{10}{x}$	x	10
הפסקה	-	$\frac{1}{3}$	-
אחרי ההפסקה	$\frac{10}{x}+3=\frac{10+3x}{x}$	$\frac{20x}{10+3x}$	20
30 מ"ק רצוף	$\frac{10}{x}$	$3x$	30

הזמן שהצינור הזרים מים, כולל ההפסקה שווה לזמן שהיה נדרש לו *למלא* 30 מ"ק *ללא* הפסקה בקצב המקורי.

נפתור את המשוואה המתאימה.

$$3x = x + \frac{1}{3} + \frac{20x}{10+3x}$$

$$2x = \frac{1}{3} + \frac{20x}{10+3x} \quad / 3(10+3x)$$

$$6x(10+3x) = 10 + 3x + 60x$$

$$60x + 18x^2 = 10 + 63x$$

$$18x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 27}{36} \quad \rightarrow x = \frac{5}{6}, \quad \cancel{x = -\frac{2}{3}} \quad \Leftarrow x > 0$$

תשובה: הצינור הזרים מים עד ההפסקה במשך $\frac{5}{6}$ שעה (50 דקות).

ב. הצינור ממלא כל שעה $\frac{10}{5/6}=12$ מ"ק מים.

במשך 18 שעות הוא ממלא שליש בריכה, כלומר בריכה מלאה ב- 54 שעות,

ומכאן שנפח הבריכה $54\cdot 12=648$ מ"ק מים.

שני הברזים מזרימים מים בקצב אחיד ובאותו פרק זמן, מכאן שכל אחד מהם ממלא $648:2=324$ מ"ק מים.

נסמן ב- y (שעות) את הזמן שבו שני הצינורות ממלאים את הבריכה,

ולכן $\frac{324}{y}$ הוא ההספק לשעה של כל אחד מהצינורות,

כאשר הספק הצינור המקורי היה 12 מ"ק לפני ההפסקה ו- 15 מ"ק לאחר ההפסקה.

$$12<\frac{324}{y}<15$$

$$\boxed{21.6<y<27}$$

תשובה: תחום השעות, של הזמן ששני הצינורות ממלאים את הבריכה, הוא בין 21.6 ל- 27 שעות.

2

א. נתונות שתי סדרות המוגדרות לפי כלל נסיגה של סדרה חשבונית

$$\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=a_n+3 \quad \to d=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1=5 \\ b_{n+1}=b_n+3 \quad \to d=3 \end{cases}.$$

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $\frac{1}{2(3\cdot1+2)}=\frac{1}{2\cdot5}=\frac{1}{10}$ אגף שמאל: $\frac{1}{a_1\cdot b_1}=\frac{1}{2\cdot5}=\frac{1}{10}$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $\frac{1}{a_1\cdot b_1}+\frac{1}{a_2\cdot b_2}+\frac{1}{a_3\cdot b_3}+...+\frac{1}{a_k\cdot b_k}=\frac{k}{2(3k+2)}$,

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.

כלומר, $\frac{1}{a_1\cdot b_1}+\frac{1}{a_2\cdot b_2}+\frac{1}{a_3\cdot b_3}+...+\frac{1}{a_k\cdot b_k}+\frac{1}{a_{k+1}\cdot b_{k+1}}=\frac{k+1}{2(3(k+1)+2)}$

נחליף, את הביטוי המסומן, על פי הנחת האינדוקציה

$$\underbrace{\frac{1}{a_1\cdot b_1}+\frac{1}{a_2\cdot b_2}+\frac{1}{a_3\cdot b_3}+...+\frac{1}{a_k\cdot b_k}}_{\downarrow}+\frac{1}{a_{k+1}\cdot b_{k+1}}=\frac{k+1}{2(3(k+1)+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2(3k+2)}+\frac{1}{a_{k+1}\cdot b_{k+1}}=\frac{k+1}{2(3k+5)}$$

נחשב את הביטויים על פי נוסחת איבר כללי של סדרה חשבונית

$$a_{k+1}=a_1+(k+1-1)d=2+3k \quad ,b_{k+1}=b_1+(k+1-1)d=5+3k$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2(3k+2)}+\frac{1}{(3k+2)\cdot(3k+5)}=\frac{k+1}{2(3k+5)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(3k+5)+2}{2(3k+2)\cdot(3k+5)}=\frac{k+1}{2(3k+5)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3k^2+5k+2}{2(3k+2)\cdot(3k+5)}=\frac{k+1}{2(3k+5)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(3k+2)}{2(3k+2)\cdot(3k+5)}=\frac{k+1}{2(3k+5)} \qquad \leftarrow 3k^2+5k+2=0, \quad k=-1,\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k+1}{2(3k+5)}=\frac{k+1}{2(3k+5)}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$, הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי כלשהו,

אז היא נכונה עבור $n=k+1$ לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

הסבר: פרוק הביטוי $3k^2+5k+2=0$ ע"י משוואה ריבועית:

$$3k^2+5k+2=0$$

$$k_{1,2}=\frac{-5\pm 1}{6}\quad \rightarrow k=-1,-\frac{2}{3}$$

$$3(k+1)(k+\frac{2}{3})$$

$$(k+1)(3k+2)$$

ב. על פי הטענה שהוכחה בסעיף א, נקבל:

$$\frac{1}{a_1\cdot b_1}+\frac{1}{a_2\cdot b_2}+\frac{1}{a_3\cdot b_3}+...+\frac{1}{a_n\cdot b_n}+\frac{1}{a_{n+1}\cdot b_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}\cdot b_{n+2}}+\frac{1}{a_{n+3}\cdot b_{n+3}}...+\frac{1}{a_{2n}\cdot b_{2n}}=\frac{2n}{2(6n+2)},$$

וגם כמובן $$\frac{1}{a_1\cdot b_1}+\frac{1}{a_2\cdot b_2}+\frac{1}{a_3\cdot b_3}+...+\frac{1}{a_n\cdot b_n}=\frac{n}{2(3n+2)}$$

לכן,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}\cdot b_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}\cdot b_{n+2}}+\frac{1}{a_{n+3}\cdot b_{n+3}}...+\frac{1}{a_{2n}\cdot b_{2n}} &= \frac{2n}{2(6n+2)}-\frac{n}{2(3n+2)}\\ '' \qquad &= \frac{2n(3n+2)-n(6n+2)}{2(6n+2)(3n+2)}\\ '' \qquad &= \frac{6n^2+4n-6n^2-2n}{2(6n+2)(3n+2)}\\ '' \qquad &= \frac{2n}{2(6n+2)(3n+2)}\\ '' \qquad &= \frac{n}{(6n+2)(3n+2)}\end{aligned}$$

לפי נוסחת איבר כללי של סדרה חשבונית

$a_{2n+1}=a_1+(2n+1-1)d=2+6n$, $a_{n+1}=a_1+(n+1-1)d=2+3n$,

ולכן:

$$\frac{1}{a_{n+1}\cdot b_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}\cdot b_{n+2}}+\frac{1}{a_{n+3}\cdot b_{n+3}}...+\frac{1}{a_{2n}\cdot b_{2n}}=\frac{n}{a_{n+1}\cdot a_{2n+1}}$$

הוכַח.

א. קיימות שתי אפשרויות לחלוקת הכדורים(בהנחה שאין הבדל בין הכדים)

(1) בכד אחד שני כדורים לבנים ובאחר כדור שחור: $P(white)=0.5\cdot 1+0.5\cdot 0=0.5$ **.**

(2) בכד אחד כדור שחור וכדור לבן ובאחר כדור לבן: $P(white)=0.5\cdot 0.5+0.5\cdot 1=0.75$

לפי החישובים הנ"ל ,כדי שהסיכוי להוציא כדור לבן יהיה הגדול ביותר, יש לחלק את הכדורים לפי אפשרות (2), כלומר : בכד אחד כדור שחור וכדור לבן ובאחר כדור לבן.

תשובה: בכד אחד כדור שחור וכדור לבן, ובכד האחר כדור לבן

ב. ההסתברות להוציא כדור לבן, מכד עם שני כדורים לבנים ושלושה שחורים היא $\frac{2}{5}$ **.**

(1) זו התפלגות בינומית, כאשר $n=5$ **,** $p=\frac{2}{5}$ **,** $k=2$

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי $P_n(k)=\binom{n}{k}(p)^k(1-p)^{n-k}$

$$\mathrm{P}_5(2)=\binom{5}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(1-\frac{2}{5}\right)^{5-2}$$

$$\mathrm{P}_5(2)=\frac{5!}{2!(5-2)!}\cdot 0.4^2\cdot 0.6^3$$

$$\mathrm{P}_5(2)=10\cdot 0.4^2\cdot 0.6^3$$

$$\mathrm{P}_5(2)=0.3456$$

תשובה: ההסתברות להוציא שני כדורים לבנים בדיוק היא 0.3456 **.**

(2) יש להוציא שלושה כדורים לבנים בדיוק, מתוך שישה, כך שהכדור הלבן השלישי יהיה בהוצאה השישית.

לכן יש להוציא בדיוק שני לבנים, מתוך חמשת הראשונים (שאת ההסתברות חישבנו בתת סעיף ב (1)),

וגם שהכדור השישי שנוציא יהיה לבן ($p=\frac{2}{5}$ **) .**

אלו מאורעות בלתי תלויים לכן החיתוך שלהם הוא כפל הסתברויות.

$$\mathrm{P(3\ white\ out\ of\ 6\cap the\ 6th\ is\ white)}=\mathrm{P}_5(2)\cdot \mathrm{P(\ white\ )}$$

$$\mathrm{P(3\ white\ out\ of\ 6\cap the\ 6th\ is\ white)}=0.3456\cdot\frac{2}{5}=0.13824$$

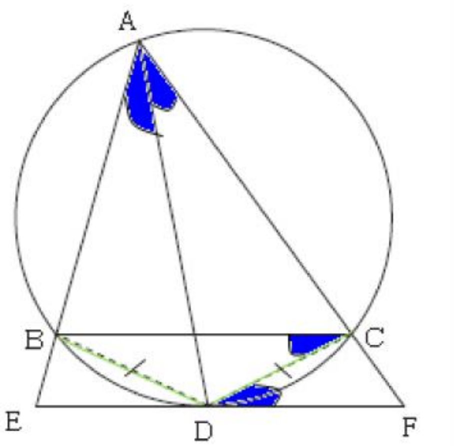
תשובה: ההסתברות היא 0.13824 **.**

4

נתונים

1. $\sphericalangle BAD = \sphericalangle FAD$ **2.** EF **משיק למעגל בנקודה** D.

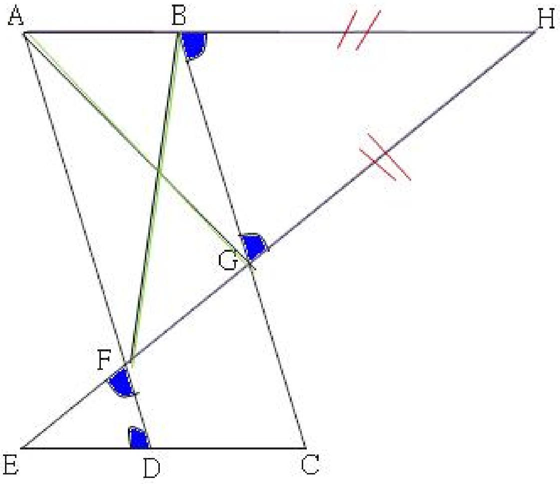
צ"ל: א. $BC \parallel EF$ **ב** $\Delta ABD \sim \Delta DCF$. **ג.** $AD \cdot BD = DF \cdot AB$



הסבר	מס'	טענה	נימוק
2	3	EF **משיק למעגל בנקודה** D	נתון
3	4	$\sphericalangle FDC = \sphericalangle FAD$	זווית בין משיק למיתר, שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני
1	5	$\sphericalangle BAD = \sphericalangle FAD$	נתון
	6	$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$	על קשתות שוות $(\overset{\frown}{BD})$ נשענות זוויות היקפיות שוות
4, 5, 6	7	$\sphericalangle BCD = \sphericalangle FDC$	כלל המעבר
7	8	$BC \parallel EF$	אם זוויות מתחלפות שוות אז הישרים מקבילים
מ.ש.ל. א			
6, 7	9	$\sphericalangle FDC = \sphericalangle BAD$ **(ז)**	כלל המעבר
	10	$\sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD = 180°$	סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל הוא $180°$
	11	$\sphericalangle FCD + \sphericalangle ACD = 180°$	זוויות צמודות משלימות ל- $180°$
10, 11	12	$\sphericalangle DCF = \sphericalangle ABD$ **(ז)**	הצבה
9, 12	13	$\Delta ABD \sim \Delta DCF$	משפט דמיון זווית זווית
מ.ש.ל. ב			
13	14	$\frac{AB}{DC} = \frac{AD}{DF} = \frac{BD}{CF}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
5	15	$DC = BD$	על זוויות היקפיות שוות נשענים מיתרים שווים
14, 15	16	$\frac{AB}{BD} = \frac{AD}{DF}$	הצבה
16	17	$AD \cdot BD = DF \cdot AB$	חישוב
מ.ש.ל. ג			

5

עב מאי 12 מועד קיץ א שאלון 35806



נתונים

1. ABCD **מקבילית** **2.** $ED = EF$

עבור ב.

3. 2 **ס"מ** $= FD$ **4.** 3 **ס"מ** $= EF$

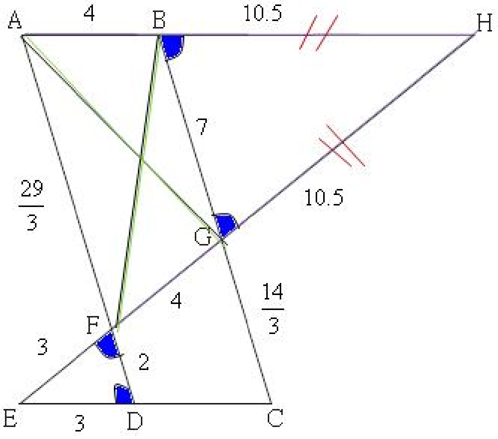
5. 7 **ס"מ** $= BG$ **6.** 4 **ס"מ** $= AB$

צ"ל: א. (1) $HG = HB$ **(2)** $\Delta AGH \cong \Delta FBH$.

ב. (1) BH **(2)** $\frac{AF}{GC}$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	**6**	ABCD **מקבילית**	**נתון**
6	**7**	$AB \parallel CD$	**צלעות נגדיות מקבילות במקבילית**
7	**8**	$\sphericalangle EDF = \sphericalangle HAD$	**זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים**
1	**9**	$AD \parallel BC$	**צלעות נגדיות מקבילות במקבילית**
9	**10**	$\sphericalangle HBC = \sphericalangle HAD$	**זוויות מתאימות שוות בין מקבילים**
8, 10	**11**	$\sphericalangle HBC = \sphericalangle EDF$ **(ז)**	**כלל המעבר**
7	**12**	$\sphericalangle H = \sphericalangle E$ **(ז)**	**זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים**
11, 12	**13**	$\sphericalangle HGB = \sphericalangle DFE$	**סכום זוויות במשולש** 180°
2	**14**	$ED = EF$	**נתון**
14	**15**	$\sphericalangle DFE = \sphericalangle EDF$	**מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות** ΔEDF
11, 13, 15	**16**	$\sphericalangle HBC = \sphericalangle HGB$	**כלל המעבר**
16	**17**	$HG = HB$ **(צ)**	**מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות** ΔHBG
מ.ש.ל. א (1)			
9	**18**	$AF \parallel BG$	**חלקים מישרים מקבילים גם מקבילים**
18	**19**	$\frac{HB}{AH} = \frac{HG}{FH}$	**משפט תאלס הרחבה 1**
17, 19	**20**	$AH = FH$ **(צ)**	**חישוב**
	21	$\sphericalangle H = \sphericalangle H$ **(ז)**	**זווית משותפת**
17, 20, 21	**22**	$\Delta AGH \cong \Delta FBH$	**משפט חפיפה צלע זווית צלע**
מ. ש. ל. א (2)			
3	**23**	2 **ס"מ** $= FD$	**נתון**
4	**24**	3 **ס"מ** $= EF$	**נתון**

הסבר	מס'	טענה	נימוק
5	25	$BG = 7$ ס"מ	נתון
6	26	$AB = 4$ ס"מ	נתון
11, 12	27	$\Delta EFD \sim \Delta HGB$	משפט דמיון זווית זווית
27	28	$\frac{EF}{HG} = \frac{ED}{HB} = \frac{FD}{GB}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
23, 24, 26, 28	29	$\frac{3}{HG} = \frac{2}{7}$	הצבה
29	30	$HG = 10.5$ ס"מ	חישוב
17, 30	31	$BH = 10.5$ ס"מ	כלל העברה
מ.ש.ל. ב (1)			
9	32	$\frac{BG}{AF} = \frac{BH}{AH}$	משפט תאלס הרחבה 1 ΔAHF
26, 30	33	$AH = 14.5$ ס"מ	חיבור קטעים
25, 31, 33	34	$\frac{7}{AF} = \frac{10.5}{14.5}$	הצבה
34	35	$AF = \frac{29}{3}$ ס"מ	חישוב
23, 35	36	$AD = \frac{35}{3}$ ס"מ	חיבור קטעים
6, 36	37	$BC = \frac{35}{3}$ ס"מ	צלעות נגדיות שוות במקבילית וכלל המעבר
25, 37	38	$GC = \frac{14}{3}$ ס"מ	הפרש קטעים
35, 38	39	$\frac{AF}{GC} = \frac{29}{14}$	חישוב
מ.ש.ל. ב (2)			



$\sphericalangle DAB = \sim$ **(נתון)**

AB **קוטר במעגל (נתון)**

$\sphericalangle ADB = 90^\circ$ **(זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה)**

$\sphericalangle DBA = 90^\circ - \sim$ **(סכום זוויות ב-** ΔADB **הוא** 180°**)**

$\sphericalangle CAD = \sphericalangle DBA = 90^\circ - \sim$ **(בטרפז שווה שוקיים הקטעים היוצאים מאותו בסיס שווים,**
ובהתאם זוויות אלו שוות במשולש שווה שוקיים ΔALB **)**

$\sphericalangle DAC = 2\sim - 90^\circ$ **(הפרש זוויות)**

$\frac{KL}{LM} = \frac{DL}{LB}$ **(משפט תאלס הרחבה 2)**

$\frac{DL}{LB} = \frac{DL}{LA}$ **(הראינו כי** ΔALB **שווה שוקיים)**

$\underline{\Delta ALD}$

$$\sin(2\alpha - 90^\circ) = \frac{DL}{LA}$$

$$\frac{DL}{LA} = -\sin(90^\circ - 2\alpha)$$

$$\frac{DL}{LA} = -\cos 2\alpha$$

ולכן $\boxed{\frac{KL}{LM} = -\cos 2\alpha}$ **על פי כלל המעבר.**

תשובה: $\frac{KL}{LM} = -\cos 2\alpha$

א. (1) לפונקציה שתי אסימפטוטות אנכיות $x=4$ ו- $x=-1$, נעלה אותן על מערכת הצירים.

לפונקציה אסימפטוטה אופקית $y=0$, כיוון שהפונקציה רציונאלית, הגרף ישאף לציר ה- x ,
הן לקרן החיובית והן לקרן השלילית.

הפונקציה מוגדרת עבור כל $x\neq 1$ ו- $x\neq 4$, לכן הגרף של הפונקציה יורכב משלושה ענפים.

$f(0)>0$, לכן נסמן נקודה על הקרן החיובית של ציר ה- y .

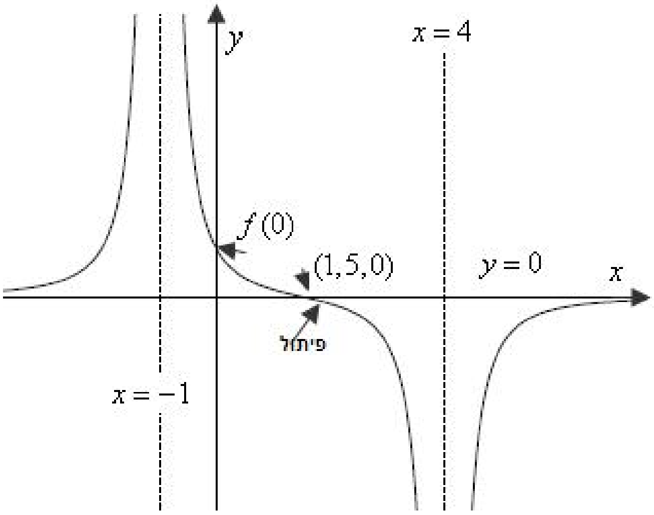
$f(1.5)=0$, לכן נסמן את הנקודה $(1,5,0)$ על ציר ה- x .

$f'(x)<0$ רק עבור $-1<x<4$, ומכיוון שהפונקציה רציונאלית, הרי שבשאר התחומים היא עולה.

$f(x)<0$ עבור $x>4$ לכן בתחום זה הגרף יהיה מתחת לציר ה- x ושואף לאסימפטוטות $x=4$ ו- $y=0$.

$f(x)>0$ עבור $x<-1$ לכן בתחום זה הגרף יהיה מעל לציר ה- x ושואף לאסימפטוטות $x=-1$ ו- $y=0$.

תשובה: סקיצה אפשרית:



(2) בתחום $-1<x<4$ גרף הפונקציה עובר מקעירות כלפי מעלה (עקב השאיפה ל- $x=-1$ בתחום של הירידה) לקעירות כלפי מטה (עקב השאיפה ל- $x=4$ בתחום של הירידה), כלומר לגרף הנגזרת תהייה נקודת קיצון מסוג מקסימום, כי הנגזרת תעבור מעלייה לירידה בנקודה זו (ולכן הנגזרת שלה $f''(x)$ מחיובית לשלילית).

בציור מסומנת נקודת פיתול אפשרית.

הערה: לא ניתן לשלול אפשרות של נקודות פיתול נוספות בתחום זה,
אך בכל מקרה תהיינה מספר אי זוגי של נקודות פיתול, ובהתאם נקודת מקסימום אחת יותר מנקודת מינימום של פונקציית הנגזרת.

תשובה: נקודת מקסימום אחת לפחות, ותתכנה זוגות נוספים של נקודות קיצון.

ב. נתון כי הפונקציה $f(x)$ **מקיימת** $f(x)=\frac{3a-3bx}{(x^2-ax-4)^2}$

כיוון שהפונקציה אינה מוגדרת עבור $x=-1$ **ו-** $x=4$ **.**

הרי שהביטוי במכנה הוא $((x-4)(x+1))^2=(x^2-3x-4)^2$ **ולכן** $a=3$ **.**

הביטוי במונה מתאפס עבור $x=1.5$ **ולכן** $3\cdot 3-3b\cdot 1.5=0$ **ובהתאם** $b=2$

תשובה: $f(x)=\frac{9-6x}{(x^2-3x-4)^2}$ **.**

8

א. נתונה הפונקציה $f(x)=4\sin^2 x\cos^2 x$ בתחום $0\le x\le\pi$.

הפתרון המוצג כאן מבוסס על מחזוריות והמידע הקיים על פונקציית ה - $\sin x$.

על פי הנוסחה של זווית כפולה $\sin 2x=2\sin x\cos x$, נקבל ש- $f(x)=\sin^2 2x$.

גרף הפונקציה $\sin x$ מתואר בסקיצה הבאה, בקו אדום, עם נקודות חיתוך עם הצירים וקיצון ידועות.

גרף הפונקציה $\sin 2x$ הוא כיווץ של $\sin x$ עקב הגדלת המחזוריות, ומתואר בקו צהוב.

ערכי הפונקציה $\sin 2x$ עבור $x=\frac{t}{2}$ יהיו שווים לערכי הפונקציה $\sin x$ עבור $x=t$.

גרף הפונקציה $f(x)=\sin^2 2x$ הופך את הגרף של $\sin 2x$ לאי-שלילי .

כאשר ערכי ה- y של $\sin^2 2x$ קטנים בערכם המוחלט מערכי הפונקציה $\sin 2x$,

למעט הערכים בנקודות הקיצון שבהם ערכם המוחלט נשאר 1.

נסמן גרף זה בכחול.

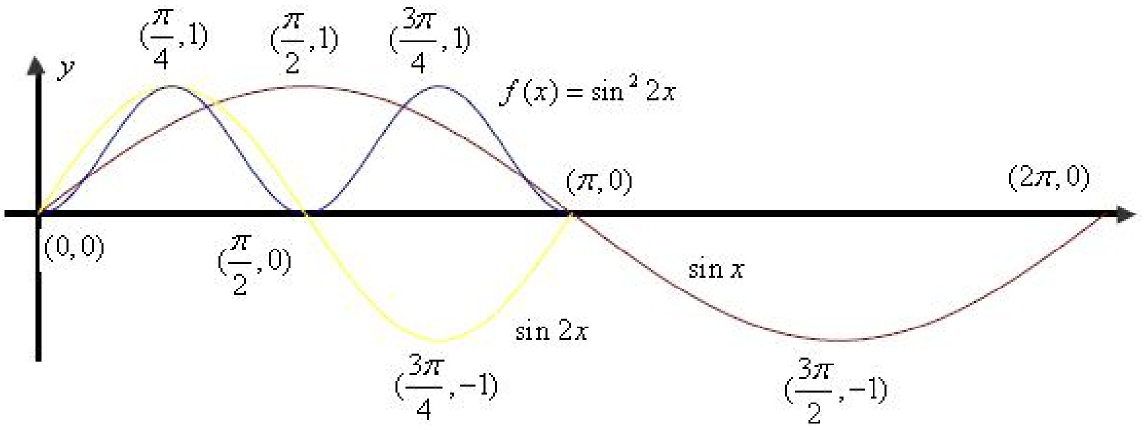
המעבר לפונקציה אי שלילית יוצר נקודת קיצון נוספת $(\frac{\pi}{2},0)$ מסוג מינימום,

כי הנקודה הפכה מנקודת חיתוך עם ציר ה- x לנקודת השקה לציר ה- x .

ומשנה סוג של אחרת $(\pi,0)$ כי הפכה מנקודת מקסימום קצה לנקודת מינימום קצה.

נציג את כל ערכי הפונקציות בטבלה מרכזת:

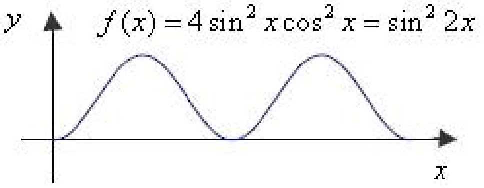
	$\sin x$ **בתחום** $0 \le x \le 2\pi$	$\sin 2x$ **בתחום** $0 \le x \le \pi$	$\sin^2 2x$ **בתחום** $0 \le x \le \pi$
נקודת חיתוך ציר y	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
נקודת חיתוך ציר x	$(0,0)$ **,** $(\pi,0)$ **,** $(2\pi,0)$	$(0,0)$ **,** $(\frac{\pi}{2},0)$ **,** $(\pi,0)$	$(0,0)$ **,** $(\frac{\pi}{2},0)$ **,** $(\pi,0)$
נקודות קיצון קצה	$(0,0)$ **מינימום** $(2\pi,0)$ **מקסימום**	$(0,0)$ **מינימום** $(\pi,0)$ **מקסימום**	$(0,0)$ **מינימום** $(\pi,0)$ **מינימום**
נקודות קיצון פנימיות	$(\frac{\pi}{2},1)$ **מקסימום** $(\frac{3\pi}{2},-1)$ **מינימום**	$(\frac{\pi}{4},1)$ **מקסימום** $(\frac{3\pi}{4},-1)$ **מינימום**	$(\frac{\pi}{4},1)$ **מקסימום** $(\frac{3\pi}{4},1)$ **מקסימום**



תשובה: $(0,0)$ **,** $(\frac{\pi}{2},0)$ **,** $(\pi,0)$ **.**

ב. תשובה: $(0,0)$ **מינימום ,** $(\frac{\pi}{4},1)$ **מקסימום ,** $(\frac{\pi}{2},0)$ **מינימום,** $(\frac{3\pi}{4},1)$ **,** $(\pi,0)$ **מינימום.**

ג. הסקיצה המתאימה, כפי שהוסבר בסעיף א:



ד. (1) $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin(4x)$

$$g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4x)$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 2x)$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\sin^2 2x$$

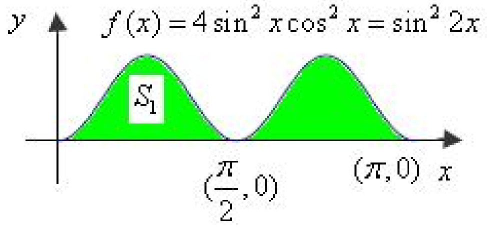
$$g'(x)=\sin^2 2x= f(x)$$

הוכח.

(2) עקב הסימטריה של $\sin 2x$ **לציר ה-** x **, בתחום** $0\le x\le \circledR$ **,**

הרי שגם אחרי המעבר לפונקציה $f(x)=\sin^2 2x$

תהיה פונקציה $f(x)$ **סימטרית משני צידי הישר** $x=\frac{\pi}{2}$ **, ולכן יהיו שני השטחים המסומנים שווים בשטחם.**



$$S_1=\int_0^{\frac{\circledR}{2}} f(x)\,dx=$$

$$S_1=g(x)\Big]_0^{\frac{\circledR}{2}}=$$

$$S_1=(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin(4x)\Big]_0^{\frac{\circledR}{2}}$$

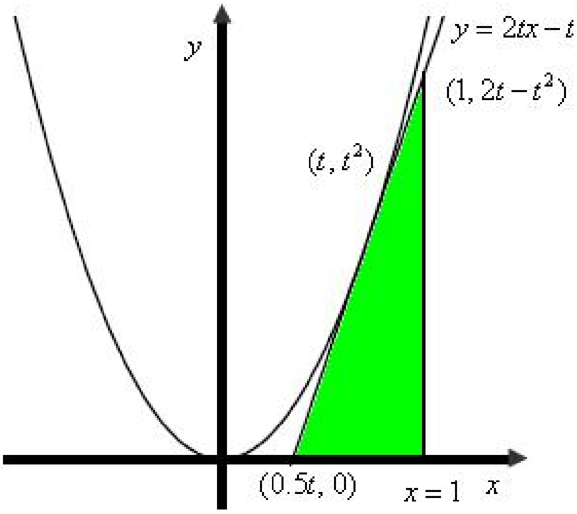
$$S_1=(\frac{1}{2}\cdot\frac{\circledR}{2}-\frac{1}{8}\sin(4\cdot\frac{\circledR}{2})-(\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{8}\sin(4\cdot 0)$$

$$S_1=\frac{\circledR}{4}$$

ולכן סכום השטחים המסומנים הוא $\frac{\circledR}{2}$

תשובה: גודל השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ **ועל ידי ציר ה-** x **הוא** $\frac{\circledR}{2}$ **.**

א. הפונקציה שיש להביא למקסימום היא השטח של המשולש הירוק.



נסמן ב- t את נקודת ההשקה ולכן שיעוריה (t, t^2)

שיפוע המשיק שווה לערך הנגזרת בנקודה: $y' = 2x \quad \to m = 2t$

משוואת המשיק: $y - t^2 = 2t(x - t) \quad \to \boxed{y = 2tx - t^2}$

נקודות החיתוך של המשיק עם ציר ה- x היא $(0.5t, 0)$.

נקודת החיתוך של המשיק עם הישר $x = 1$ היא $(1, 2t - t^2)$

השטח המבוקש:

$$S(t) = \frac{1}{2}(1 - 0.5t)(2t - t^2)$$
$$S(t) = \frac{1}{2}(2t - t^2 - t^2 + 0.5t^3)$$
$$\boxed{S(t) = 0.25t^3 - t^2 + t}$$

נמצא נקודת קיצון

$$\boxed{S'(t) = 0.75t^2 - 2t + 1}$$
$$0.75t^2 - 2t + 1 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{2 \pm 1}{1.5} \quad \to \boxed{t = \frac{2}{3}} \quad \cancel{t = 2} \leftarrow 0 < t < 1$$
$$\boxed{s''(t) = 1.5t - 2}$$
$$s''(\frac{2}{3}) = 1.5 \cdot \frac{2}{3} - 2 < 0 \quad \to Max$$

נציב $t = \frac{2}{3}$ בפונקציית השטח: $S(\frac{2}{3}) = 0.25(\frac{2}{3})^3 - (\frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

תשובה: השטח המקסימלי של המשולש הוא $\frac{8}{27}$ יחידות שטח.