א. (1) הנקודה $M(x_0, y_0)$ **נמצאת על המעגל הקנוני** $x^2 + y^2 = 25$ **, ונקודה** $P(x, y)$ **היא מפגש של** MB **ו-** NA **.**

MN **מאונך לציר ה-** x **, לכן** $y_N = -y_M = -x_0$ **עקב הסימטריה של המעגל לציר ה-** x **, ובהתאם** $N(x_0, -y_0)$ **.**

רדיוס המעגל הקנוני הוא 5 **, ובהתאם** $A(5, 0)$ **,** $B(-5, 0)$ **.**

$$m_{MB} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{y_0 - 0}{x_0 - (-5)} = \frac{y_0}{x_0 + 5}$$

$$y - 0 = \frac{y_0}{x_0 + 5}(x - (-5))$$

$$\boxed{MB \equiv y = \frac{y_0}{x_0 + 5}x + \frac{5y_0}{x_0 + 5}}$$

$$m_{NA} = \frac{y_N - y_A}{x_N - x_A} = \frac{-y_0 - 0}{x_0 - 5} = \frac{-y_0}{x_0 - 5}$$

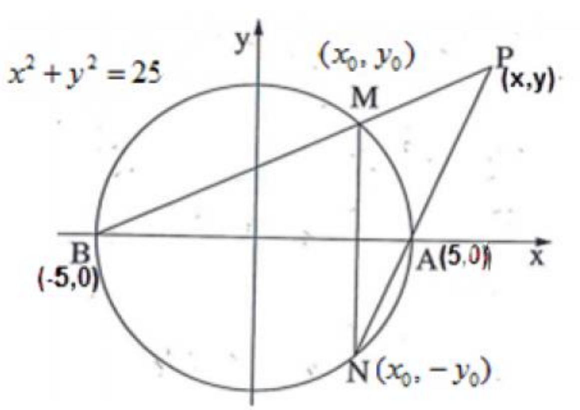
$$y - 0 = \frac{-y_0}{x_0 - 5}(x - 5)$$

$$\boxed{NA \equiv y = \frac{-y_0}{x_0 - 5}x + \frac{5y_0}{x_0 - 5}}$$

תשובה: $MB \equiv y = \frac{y_0}{x_0 + 5}x + \frac{5y_0}{x_0 + 5}$, $NA \equiv y = \frac{-y_0}{x_0 - 5}x + \frac{5y_0}{x_0 - 5}$ **.**

(2) נראה, בשתי דרכים, כי המקום הגיאומטרי של הנקודות $P(x, y)$ **מקיים את המשוואה** $y^2 = x^2 - 25$ **.**

<u>דרך ראשונה</u>, הבעת שיעורי הנקודה $M(x_0, y_0)$ **באמצעות** x, y **, על ידי השוואת שתי המשוואות שהתקבלו, והצבתן במשוואת המעגל.**



$$P\begin{cases} y = \frac{y_0}{x_0 + 5}x + \frac{5y_0}{x_0 + 5} \\ y = \frac{-y_0}{x_0 - 5}x + \frac{5y_0}{x_0 - 5} \end{cases}$$

$$\frac{y_0}{x_0 + 5}x + \frac{5y_0}{x_0 + 5} = \frac{-y_0}{x_0 - 5}x + \frac{5y_0}{x_0 - 5} \quad / : y_0 \neq 0$$

$$\frac{x}{x_0 + 5} + \frac{5}{x_0 + 5} = \frac{-x}{x_0 - 5} + \frac{5}{x_0 - 5} \quad / \cdot (x_0 + 5)(x_0 - 5)$$

$$x(x_0 - 5) + x(x_0 + 5) = -5(x_0 - 5) + 5(x_0 + 5)$$

$$2xx_0 = 50 \quad \rightarrow \boxed{x = \frac{25}{x_0}} , \boxed{x_0 = \frac{25}{x}}$$

$$y = \frac{y_0}{x_0 + 5}x + \frac{5y_0}{x_0 + 5} \quad \rightarrow y = \frac{y_0(x + 5)}{x_0 + 5}$$

$$y = \frac{y_0(x + 5)}{\frac{25}{x} + 5} \quad \rightarrow y = \frac{xy_0(x + 5)}{25 + 5x}$$

$$y = \frac{xy_0}{5} \quad \rightarrow \boxed{y_0 = \frac{5y}{x}}$$

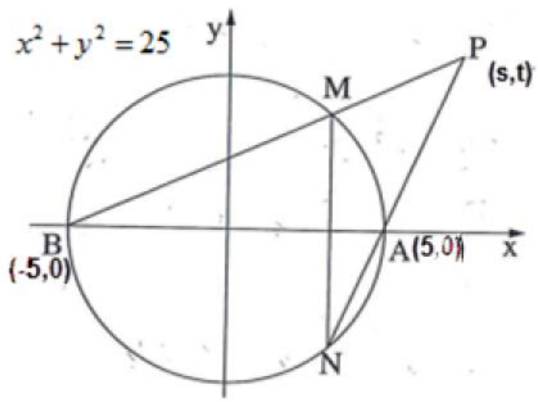
נציב $M(\frac{25}{x},\frac{5y}{x})$ במשוואת המעגל: $(\frac{25}{x})^2+(\frac{5y}{x})^2=25$,

ובהתאם : $\frac{625}{x^2}+\frac{25y^2}{x^2}=25 \quad /:\frac{25}{x^2}$ ונקבל: $25+y^2=x^2$ ולכן: $y^2=x^2-25$.

תשובה: הוכַח.

<u>דרך שנייה ומומלצת</u>, השוואת שיפועים: $m_{MB}=m_{PB}$ ו- $m_{NA}=m_{PA}$ שהתקבלו.

נסמן $P(s,t)$ נקודה על המקום הגיאומטרי.



$$m_{MB}=m_{PB}$$

$$\frac{y_M-0}{x_M-(-5)}=\frac{t-0}{s-(-5)} \quad \rightarrow \frac{y_M}{x_M+5}=\frac{t}{s+5}$$

$$m_{NA}=m_{PA}$$

$$\frac{-y_M-0}{x_M-5}=\frac{t-0}{s-5} \quad \rightarrow \frac{-y_M}{x_M-5}=\frac{t}{s-5}$$

נחלק את שתי המשוואות זו בזו:

$$-\frac{x_M-5}{x_M+5}=\frac{s-5}{s+5}$$

$$-sx_M-5x_M+5s+25=sx_M+5s-5x_M-25$$

$$-2sx_M=-50$$

$$x_M=\frac{25}{s} \quad \rightarrow ....y_M=\frac{5t}{s}$$

והצבת $M(\frac{25}{s},\frac{5t}{s})$ במשוואת המעגל וההמשך זהה.

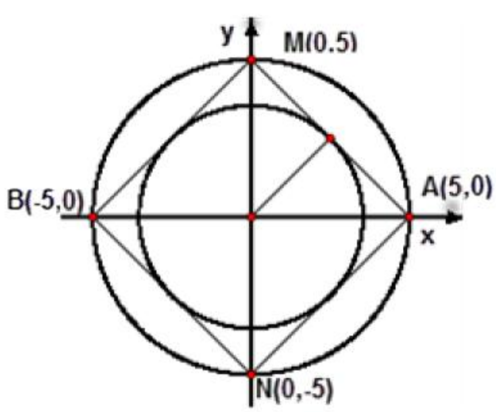
מסקנה – מומלץ להשתמש בשיפועים, ולא להיחפז למציאת משוואות ישרים בשאלון זה.

ב. $MBNA$ הוא ריבוע, שקדקודיו הם : $M(0,5)$, $B(-5,0)$, $N(0,-5)$ ו- $A(5,0)$.

רדיוס המעגל החסום, שמרכזו הוא בראשית, הוא מרחק הראשית, לדוגמה, מהצלע MA .

$$m_{MA}=\frac{5-0}{0-5}=-1$$

המשוואה המפורשת של הצלע MA היא $y=-x+5$ ובצורתה הכללית: $x+y-5=0$



$$d_{O_{MA}}=-\frac{0+0-5}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$.

תשובה: המרחק הוא $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

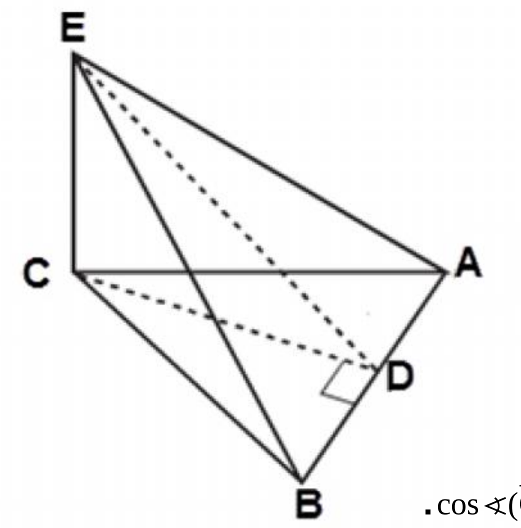
בגרות עה ינואר 15 מועד חורף שאלון 35807

א. נתון משולש שקודקודיו הם: $C(1,1,1)$ **,** $B(-2,-5,-5)$ **,** $A(-10,3,11)$.

גובה המשולש לצלע AB **הוא** CD **, ולכן** $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$ **ובהתאם** $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$**.**

$\overrightarrow{AB} = \underline{B} - \underline{A} = \underline{x} = (8,-8,-16)$ **, ולכן ההצגה הפרמטרית של הישר:** $\ell_{AB} = \underline{x} = (-10, 3, 11) + t(1,-1,-2)$**.**

נקודה טיפוסית על הישר היא: $(-10+t, 3-t, 11-2t)$**.**



$\overrightarrow{CD} = \underline{D} - \underline{C} = \underline{x} = (-11+t, 2-t, 10-2t)$**.**

$$(-11+t, 2-t, 10-2t) \cdot (1,-1,-2) = 0$$
$$-33+6t = 0$$
$$t = 5.5$$
$$\underline{D} = \underline{A} + 5.5\underline{(1,-1,-2)} = \underline{(-4.5,-2.5,0)}$$

תשובה: $D(-4.5,-2.5,0)$ **.**

ב. נתונה הנקודה : $E(-1,5,-2)$ **.**

(1) נמצא את הזווית בין הישר CE **לישר** AB **, כאשר:** $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{|\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CE}||\overrightarrow{AB}|}$**.**

$$\overrightarrow{CE} = \underline{E} - \underline{C} = \underline{x} = (-2,4,-3)$$
$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB} = (-2,4,-3)(1,-1,-2)$$
$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB} = -2-4+6 = 0$$

ולכן $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{AB}$.

תשובה: הזווית היא בת $90°$**.**

(2) נמצא את הזווית בין הישר CE **לישר** BC **, כאשר:** $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{|\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{CE}||\overrightarrow{BC}|}$**.**

$$\overrightarrow{BC} = \underline{C} - \underline{B} = \underline{x} = (3,6,6)$$
$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BC} = (-2,4,-3)(3,6,6)$$
$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BC} = -6+24-18 = 0$$

ולכן $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{BC}$.

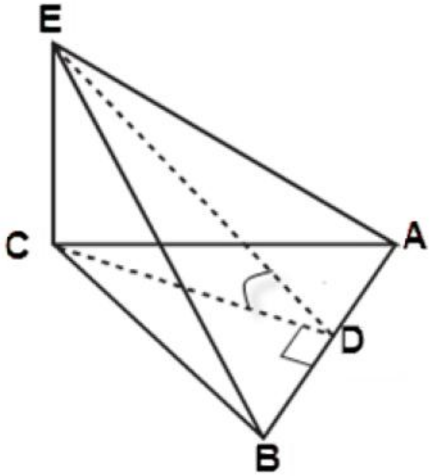
תשובה: הזווית היא בת $90°$**.**

(3) כיוון ש- $\overrightarrow{CE}$ **מאונך לשני וקטורים במישור** ABC **, שאינם תלויים זה בזה, הרי שהוא מאונך למישור** ABC **.**

תשובה: הזווית היא בת $90°$**.**

ב. הזווית בין ED למישור ABC היא $\sphericalangle EDC$, שבין המשופע להיטל שלו (ED) למישור ABC .

כי, כפי שהראינו בתת-סעיף א(3) CE הוא האנך למישור.



$$\overrightarrow{ED} = \underline{D} - \underline{E} = \underline{x} = (-3.5, -7.5, 2)$$

$$\sin \sphericalangle EDC = \frac{\left|\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC}\right|}{\left|\overrightarrow{ED}\right|\left|\overrightarrow{EC}\right|}$$

$$\sin \sphericalangle EDC = \frac{(-3.5, -7.5, 2)\ (2, -4, 3)}{\left|(-3.5, -7.5, 2)\right|\left|(2, -4, 3)\right|}$$

$$\sin \sphericalangle EDC = \frac{-7 + 30 + 6}{\sqrt{(-3.5)^2 + (-7.5)^2 + 2^2}\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \frac{29}{\sqrt{72.5}\sqrt{29}}$$

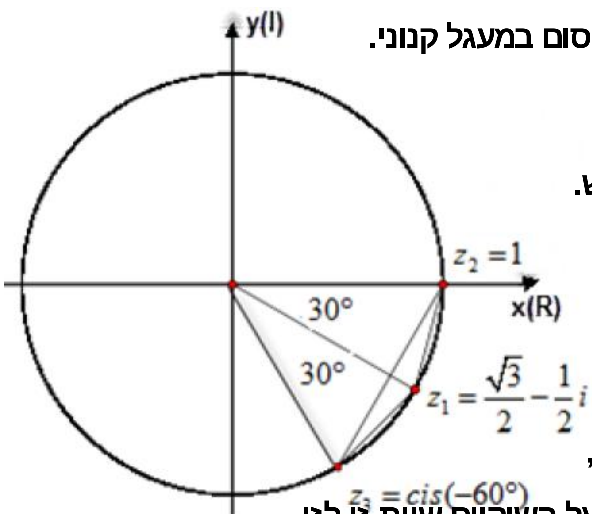
$$\sphericalangle EDC = 39.23^\circ$$

תשובה: הזווית היא בת 39.23° .

א. נפתור את המשוואה $|z|i+2z=\sqrt{3}$. **נסמן** $z=x+yi$.

$$|x+yi|i+2(x+yi)=\sqrt{3}$$
$$\sqrt{x^2+y^2}\,i+2x+2yi=\sqrt{3}$$
$$R: 2x=\sqrt{3} \quad \to x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$I: \sqrt{x^2+y^2}+2y=0 \quad \to \quad \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+y^2}=-2y \quad (\ )^2$$
$$\frac{3}{4}+y^2=4y^2 \quad \to \quad y=\pm\frac{1}{2}$$
$$\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=-2\cdot\frac{1}{2} \quad \to 1\neq -1 \quad \to not\ o.k.$$
$$\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2}=-2\cdot(-\frac{1}{2}) \quad \to 1=1 \quad \to o.k. \quad \to \boxed{z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$$

תשובה: $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.



ב. $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ **הוא קדקוד הראש של משולש שווה שוקיים, החסום במעגל קנוני.**

z_2 **ו-** z_3 **הם שני קדקודי הבסיס, כאשר** $z_2=1$ **,**

ולכן $R=1$ **לשלושת המספרים המרוכבים, שבקדקודי המשולש.**

$$\tan{}^{-}_{z_1}=\frac{-1/2}{\sqrt{3}/2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$^{-}=-30°+180°k$$
$$z_1=cis(-30°) \quad \leftarrow 4th\ quadrant$$

הזווית המרכזית המתאימה ל- $z_1=cis(-30°)$ **היא כמובן** $30°$ **,**

וכיוון שהמשולש שווה שוקיים, הרי ששתי הקשתות הנשענות על השוקיים שוות זו לזו,

ולכן הזווית המרכזית המתאימה ל- z_3 **היא בת** $60°$ **, ומכאן ש-** $z_3=cis(-60°)$.

$$w=z_1\cdot z_2\cdot z_3=cis(-30°)\cdot 1\cdot cis(-60°)=cis(-90°)=-i \ .$$

הסכום $w+w^2+w^2+w^3+w^4+...+w^{4n}$ **הוא סכום של סדרה הנדסית,**

שאיברה הראשון הוא $-i$ **מנתה** $-i$ **, ומספר האיברים בה הוא** $4n$ **.**

$$S_{4n}=\frac{-i((-i)^{4n}-1)}{-i-1}=\frac{-i(((-i)^4)^n-1)}{-i-1}=\frac{-i(1^n-1)}{-i-1}=\frac{-i(1-1)}{-i-1}=0 \ .$$

תשובה: הסכום הוא 0 .

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{2^{x-m}+2^{m-x}}$ **(** m **הוא פרמטר).**

נתונה גם הפונקציה $g(x)$ **המקיימת:** $g(x)=f'(x)f(x)$ **, כאשר** $g(2)=-\frac{3}{4}\ell n\,2$ **.**

$$f'(x)=\frac{2^{x-m}\ell n\,2-2^{m-x}\ell n\,2}{2\sqrt{2^{x-m}+2^{m-x}}}$$

$$f'(x)=\frac{2^{x-m}-2^{m-x}}{2\sqrt{2^{x-m}+2^{m-x}}}\cdot\ell n\,2$$

$$g(x)=\sqrt{2^{x-m}+2^{m-x}}\cdot\frac{2^{x-m}-2^{m-x}}{2\sqrt{2^{x-m}+2^{m-x}}}\cdot\ell n\,2$$

$$g(x)=\frac{2^{x-m}-2^{m-x}}{2}\cdot\ell n\,2$$

נציב: $y=-\frac{3}{4}\ell n\,2$, $x=2$ **בפונקציה** $g(x)$ **.**

$$-\frac{3}{4}\ell n\,2=\frac{2^{2-m}-2^{m-2}}{2}\cdot\ell n\,2$$

$$-1.5=2^{2-m}-\frac{1}{2^{2-m}} \qquad \boxed{2^{2-m}=t}$$

$$t^2+1.5t-1=0$$

$$t_1=\frac{1}{2}\ \rightarrow 2^{2-m}=2^{-1}\ \rightarrow \boxed{m=3}$$

$$t_2=-2\ \rightarrow 2^{2-m}=-2\ \rightarrow \varnothing$$

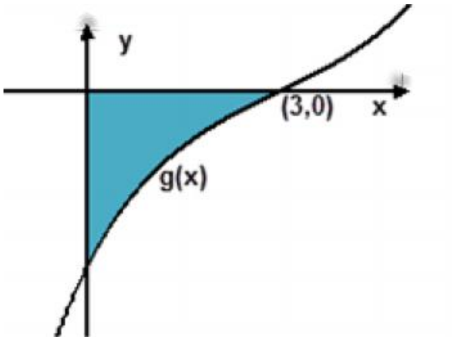
מכאן ש: $f(x)=\sqrt{2^{x-3}+2^{3-x}}$ **ו-** $g(x)=\frac{2^{x-3}-2^{3-x}}{2}\cdot\ell n\,2$ **.**

נתון כי $g(x)$ עולה לכל x .

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $g(x)=0$, לכן $2^{x-3}=2^{3-x}$ ו- $(3,0)$ הם שיעורי נקודת החיתוך.

כיוון שהפונקציה עולה, הרי שהשטח המבוקש הוא מתחת לציר ה- x .

נחשב את שטחו, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית (אפשר גם בדרך רגילה).



$$S=\int_0^3 (0-f(x)\cdot f'(x))\,dx$$

$$S=-\frac{(f(x))^2}{2}\Big]_0^3$$

$$\left.\begin{aligned} x=3:\quad -f(3)&=-\frac{2^{3-3}+2^{3-3}}{2}=-1 \\ x=0:\quad -f(0)&=-\frac{2^{0-3}+2^{3-0}}{2}=-\frac{65}{16}\end{aligned}\right\} S=-1-(-\frac{65}{16})=\boxed{3\frac{1}{16}}$$

תשובה: השטח הוא $3\frac{1}{16}$.

א. נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x)=\frac{\ell n(-x)+2}{x}$ **.**

פונקציית ה- ℓn **מקבלת רק ביטויים חיוביים, ולכן** $-x>0$ **ומכאן ש:** $x<0$ **.**

$x<0$ **אינו מאפס גם את המכנה ולכן זהו תחום ההגדרה.**

תשובה: הפונקציה מוגדרת עבור $x<0$ **.**

ב. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)=\frac{\ell n(-x)+2}{x}$ **ונקבע את סוגה.**

$$f''(x)=\frac{\frac{-1}{-x}\cdot x-(\ell n(-x)+2)}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{1-\ell n(-x)-2}{x^2}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{-1-\ell n(-x)}{x^2}}$$

$$\ell n(-x)=-1$$

$$-x=\frac{1}{e}$$

$$x=-\frac{1}{e}\sim-0.36$$

$$f''(-0.4)<0,\quad f''(-0.3)>0\quad\rightarrow Min$$

$$f'(-\frac{1}{e})=\frac{\ell n(\frac{1}{e})+2}{-1/e}=-e\quad\rightarrow\boxed{(-\frac{1}{e},-e),Min}$$

תשובה: $(-\frac{1}{e},-e),Min$ **.**

ג. נמצא את שיעור ה- x **של נקודת הקיצון של הפונקציה** $f(x)$ **ונקבע את סוגה.**

$$f'(x)=0\quad\rightarrow\ell n(-x)+2=0$$

$$\ell n(-x)=-2$$

$$-x=\frac{1}{e^2}$$

$$x=-\frac{1}{e^2}\sim-0.14$$

$$f'(-0.2)<0,\quad f'(-0.1)>0\quad\rightarrow\boxed{x=-\frac{1}{e^2},Min}$$

תשובה: $x=-\frac{1}{e^2},Min$ **.**

ד. הפונקציה $g(x) = -\frac{1}{f'(x)}$.

(1) $g(x)$ מוגדרת כאשר $f'(x)$ מוגדרת ואינה שווה ל- 0.

על פי סעיף א $f'(x)$ מוגדרת, כנתון כמו $f(x)$, עבור $x < 0$.

על פי סעיף ג $f'(x) = 0$ עבור $x = -\frac{1}{e^2}$.

תשובה: תחום ההגדרה של $g(x)$ הוא $x < 0$, $x \neq -\frac{1}{e^2}$.

(2) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של $g(x)$, ונקבע את סוגה.

$$g'(x) = -\frac{-f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$g'(x) = \frac{f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f''(x)}{+}$$

מכאן שעל פי סעיף ב מתקיים $x = -\frac{1}{e}$ מינימום.

$$g(-\frac{1}{e}) = -\frac{1}{f'(-1/e)} = -\frac{1}{-e} = \frac{1}{e}$$

תשובה: $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}), Min$.