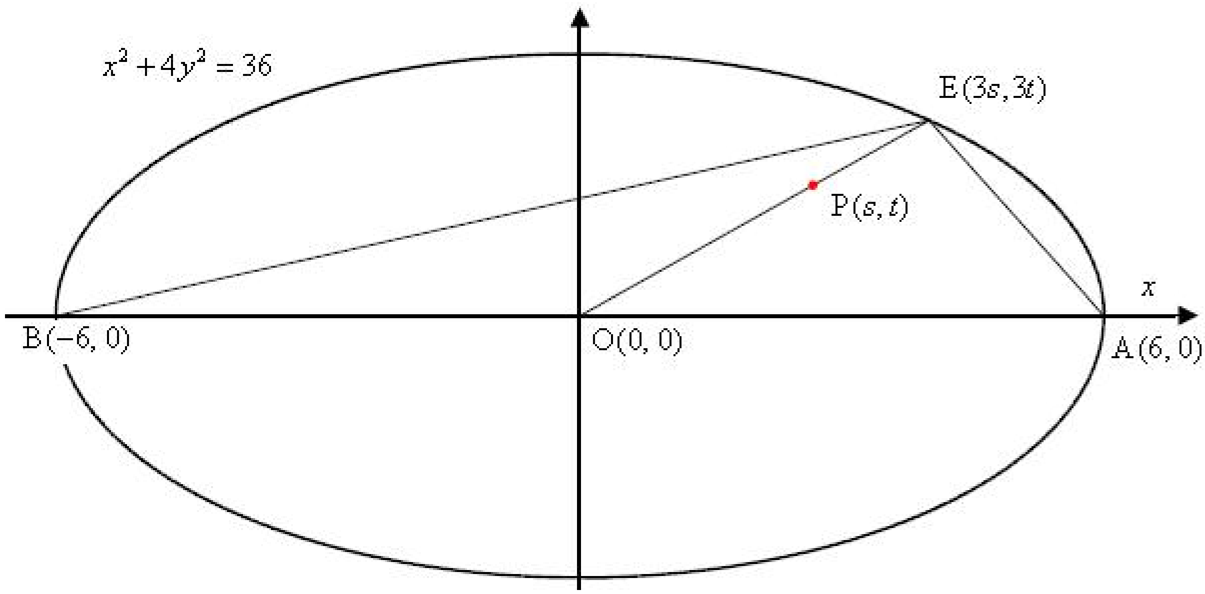
א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



משוואת האליפסה $x^2+4y^2=36$ **ובהתאם:** $A(6,0)$ **,** $B(-6,0)$ **שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה-** x **.**

נסמן $P(s,t)$ **נקודת מפגש תיכוניים, על** OE **הוא תיכון לצלע** AB **, כאשר** $O(0,0)$ **.**

נמצא את שיעורי הנקודה E **על פי נוסחה לחלוקת קטע ביחס נתון, כאשר תיכונים נחתכים ביחס של** $2:1$ **.**

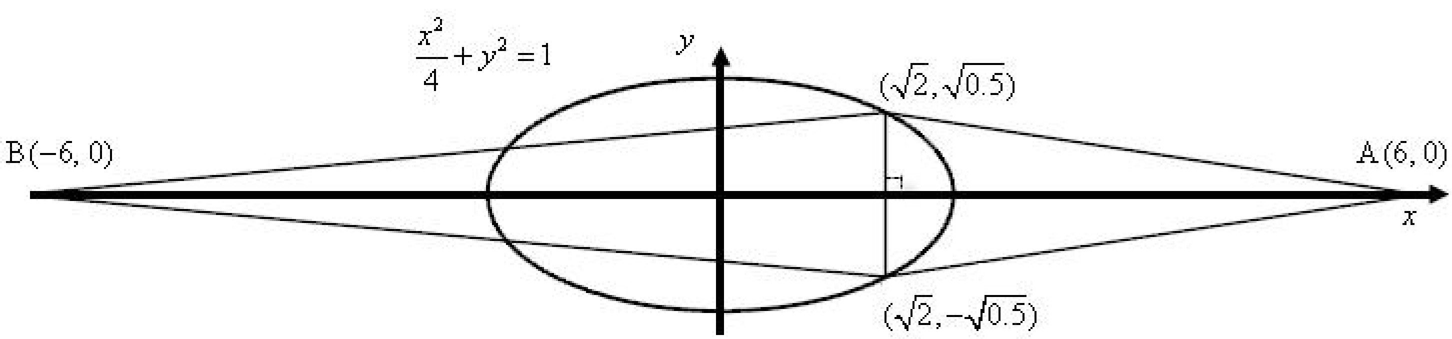
$$\left.\begin{array}{l} s=\dfrac{2\cdot 0+1\cdot x_E}{3}\rightarrow x_E=3s \\ t=\dfrac{2\cdot 0+1\cdot y_E}{3}\rightarrow y_E=3t \end{array}\right\} E(3s,3t)$$

נציב את שיעורי הנקודה במשוואת האליפסה:

$$(3s)^2+4(3t)^2=36 \quad \rightarrow 9s^2+36t^2=36$$

$$\frac{s^2}{4}+t^2=1 \quad \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{4}+y^2=1}$$

תשובה: האליפסה $\frac{x^2}{4}+y^2=1$



ב. נציב את $(\sqrt{2},y)$ **במשוואת האליפסה** $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

$y=\pm\sqrt{0.5} \leftarrow \quad \frac{(\sqrt{2})^2}{4}+y^2=1$ **ושיעורי הקדקודים הם:** $(\sqrt{2},-\sqrt{0.5}), \quad (\sqrt{2},\sqrt{0.5})$

המרובע שנוצר הוא דלתון ושטחו מחצית מכפלת האלכסונים

$$S=\frac{12\cdot 2\sqrt{0.5}}{2}=\frac{6\cdot 2}{\sqrt{2}}=\boxed{6\sqrt{2}}$$

תשובה: $6\sqrt{2}$ **יח"ר**

ג. (1) משוואת האליפסה הנתונה $x^2+4y^2=36$

כל שיעורי ה- y **במשוואת המעגל המקורית הוכפלו בקבוע, כאשר שיעורי ה-** x **קבועים,**

ולכן הנקודות $A(6,0)$ **,** $B(-6,0)$ **הן על המעגל המקורי, כאשר** AB **הוא הקוטר,**

מרכז המעגל הוא ראשית הצירים ורדיוסו 6**.**

תשובה: $x^2+y^2=36$

<u>**דרך שנייה לפתרון:**</u>

נרשום את משוואת האליפסה בדרך הבאה: $x^2+(2y)^2=36$

ומכאן שאת שיעורי המעגל המקוריים הכפילו בקבוע 2**, כדי לקבל את משוואת האליפסה הנתונה,**

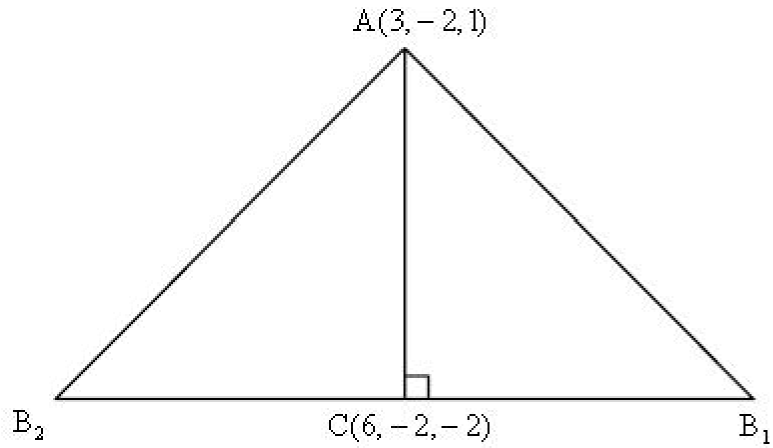
ולכן נחלק ב- 2 **ובהתאם משוואת המעגל היא** $x^2+y^2=36$ **.**

(2) האליפסה שמצאנו בסעיף א, $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ **, היא בעלת ציר גדול שאורכו** 4 **וציר קטן שאורכו** 1**.**

כיוון שמרכזה הוא ראשית הצירים, הרי שציריה קטנים מרדיוס המעגל ואין להם נקודות חיתוך.

תשובה: אין נקודות חיתוך.

א. נצייר את שני המשולשים האפשריים:



(1) תחילה נצל את העובדה שהמשולש ישר זווית, כאשר נסמן את הקדקודים האפשריים $B(a,b,c)$

$$\overrightarrow{AC} = \underline{C} - \underline{A} = \underline{x} = (3,0,-3)$$
$$\overrightarrow{BC} = \underline{C} - \underline{B} = \underline{x} = (6-a,-2-b,-2-c)$$
$$(6-a,-2-b,-2-c)\ (3,0,-3) = 0$$
$$18 - 3a + 6 + 3c = 0.$$
$$\underline{|c = a - 8}$$

עתה נשתמש בעובדה שהמישור ABC **מקביל למישור** $2x + y + 2z - 15 = 0$: ®

ובהתאם משוואתו $2x + y + 2z + d = 0$: ®$_{ABC}$ **ונציב בו את שיעורי הנקודה** $A(3,-2,1)$

$$®_{ABC} : 2\cdot 3 - 2 + 2\cdot 1 + d = 0 \to d = -6 \to ®_{ABC} = 2x + y + 2z = 6$$

נציב את שיעורי הנקודה $B(a, b, a-8)$ **ונקבל:** $2a + b + 2(a-8) = 6 \to \underline{|b = 22 - 4a}$

והמשוואה השלישית תתבסס על העובדה ש- $BC = AC$ **, כאשר** $B(a, 22-4a, a-8)$

$$\sqrt{(a-6)^2 + (24-4a)^2 + (a-6)^2} = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} \quad \to 18a^2 - 216a + 630 = 0$$
$$a_{1,2} = \frac{216 \pm 36}{36}$$
$$a = 7 \quad \to \boxed{B_1(7,-6,-1)}$$
$$a = 5 \quad \to \boxed{B_2(5,2,-3)}$$

תשובה: $B_1(7,-6,-1)$ **,** $B_2(5,2,-3)$ **.**

(2) קדקוד C **נמצא על הישר** B_1B_2 **, כי** $\angle ACB_1 = \angle ACB_2 = 90°$ **(הוא נקודת האמצע של הקטע** B_1B_2**).**

ב. גובה פירמידה הוא המרחק בין המישורים המקבילים: $h=\frac{|-15+6|}{\sqrt{2^2+1+2^2}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=3$

שטח משולש $\Delta ACB_1=\frac{\sqrt{18}\sqrt{18}}{2}=9$, ולכן $S_{\Delta AB_1B_2}=9\cdot 2=18$ ונפח הפירמידה $V=\frac{18\cdot 3}{3}=18$

תשובה: נפח הפירמידה 18 יחידות נפח.

א. (1) נתון: $\frac{|z^2-i|}{|z^2+3i|}=1$ **, כאשר** $z=x+yi$

$$\frac{|(x+yi)^2-i|}{|(x+yi)^2+3i|}=1$$
$$|(x+yi)^2-i|=|(x+yi)^2+3i|$$
$$|x^2+2xyi-y^2-i|=|x^2+2xyi-y^2+3i|$$
$$|x^2-y^2+(2xy-1)i|=|x^2-y^2+(2xy+3)i|$$
$$\sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy-1)^2}=\sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy+3)^2}$$
$$(2xy-1)^2=(2xy+3)^2$$
$$*2xy-1=2xy+3 \quad \to -1=3 \quad \to \varnothing$$
$$*2xy-1=-2xy-3 \quad \to 4xy=-2 \quad \to \boxed{xy=-0.5}$$

תשובה: $xy=-0.5$

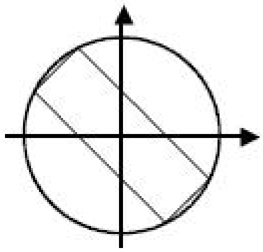
(2) כיוון שמכפלת שיעורי הנקודות שלילית, הרי שהמקום הגיאומטרי נמצא ברביע השני והרביעי.

ב. (1) נתון: $|z|^2=1.25$ **, כאשר** $z=x+yi$ **נמצא על** $xy=-0.5$

$$|(x+yi)|^2=1.25$$
$$(\sqrt{x^2+y^2})^2=1.25$$
$$x^2+y^2=1.25$$
$$x^2+(-\frac{0.5}{x})^2=1.25$$
$$x^2+\frac{0.25}{x^2}=1.25$$
$$x^4-1.25x^2+0.25=0$$
$$(x^2)_{1,2}=\frac{1.25\pm 0.75}{2}$$
$$x^2=1 \quad \to x=\pm 1 \quad \to \boxed{(1,-0.5)}, \boxed{(-1,0.5)}$$
$$x^2=0.25 \quad \to x=\pm 0.5 \quad \to \boxed{(0.5,-1)}, \boxed{(-0.5,1)}$$

תשובה: $(1,-0.5)$ **,** $(-1,0.5)$ **,** $(0.5,-1)$ **,** $(-0.5,1)$

(2) כיוון שכל הנקודות נמצאות על המעגל $x^2+y^2=1.25$



כאשר אמצע הקטע שבין $(1,-0.5)$ ו- $(-1,0.5)$ הוא ראשית הצירים.

וגם אמצע הקטע שבין $(0.5,-1)$ ו- $(-0.5,1)$ הוא ראשית הצירים,

הרי שכל קטע כזה הוא קוטר במעגל ,ומכאן שכל הזויות ישרות,

והמרובע הוא מלבן.

נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{e^{x}-ae^{-x}}{e^{x}+ae^{-x}}$

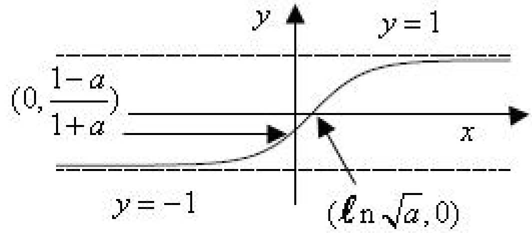
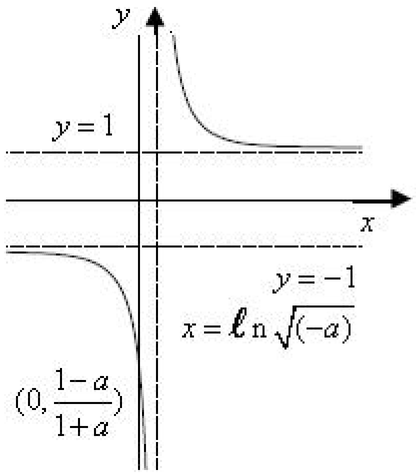
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-ae^{-x}}{e^{x}+ae^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{+\infty}-0}{e^{+\infty}+0}=1 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}-ae^{-x}}{e^{x}+ae^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{0-ae^{+\infty}}{0+ae^{+\infty}}=-1$$

$$f'(x)=\frac{(e^{x}+ae^{-x})(e^{x}+ae^{-x})-(e^{x}-ae^{-x})(e^{x}-ae^{-x})}{(e^{x}+ae^{-x})^{2}}$$

$$f'(x)=\frac{e^{x}e^{x}+a+a+a^{2}e^{-2x}-e^{x}e^{x}+a+a-a^{2}e^{-2x}}{(e^{x}+ae^{-x})^{2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{4a}{(e^{x}+ae^{-x})^{2}}}$$

		$a>0$	$a<0$
א	(1)	$e^{x}+ae^{-x}$ **חיובי לכל** x **ולכן הפונקציה מוגדרת לכל** x **האסימפטוטות אופקיות** $y=1,\quad y=-1$	$e^{x}\neq -ae^{-x}\to e^{2x}\neq -a$ $2x\neq \ell\text{n}(-a)\to x\neq \frac{1}{2}\ell\text{n}(-a)$ $\boxed{x\neq \ell\text{n}\sqrt{(-a)}}$ **האסימפטוטות אופקיות** $y=1,\quad y=-1$ **אסימפטוטה אנכית** $x=\ell\text{n}\sqrt{(-a)}$ **(מאפס מונה ולא מכנה)**
	(2)	$4a$ **חיובי לכל** x **(מכנה הנגזרת חיובי)** **ולכן הפונקציה עולה לכל** x	$4a$ **שלילי לכל** x**, ולכן הפונקציה יורדת עבור** $x>\ell\text{n}\sqrt{(-a)}$ **או** $x<\ell\text{n}\sqrt{(-a)}$
	(3)	$f(0)=\dfrac{e^{0}-ae^{-0}}{e^{0}+ae^{-0}}\to(0,\dfrac{1-a}{1+a})$ $0=e^{x}-ae^{-x}\to ae^{-x}=e^{x}\to$ $e^{2x}=a\to x=\ell\text{n}\sqrt{a}\to\boxed{(\ell\text{n}\sqrt{a},0)}$	$(0,\dfrac{1-a}{1+a})$

ב.			y y = 1 (0, (1−a)/(1+a)) x y = −1 (ℓn √a, 0)	y y = 1 x y = −1 x = ℓn √(−a) (0, (1−a)/(1+a))

א. (1) נתונה $f(x)=\ell og_3(x^2-6x+18)$ **בתחום** $0\le x\le\frac{5\pi}{3}$

נקודות קצה: $f(0)=\ell og_3(18)\quad\rightarrow(0,\,2.63),\quad f(\frac{5\pi}{3})=\ell og_3(((\frac{5\pi}{3})^2-6(\frac{5\pi}{3})+18)\quad\rightarrow(\frac{5\pi}{3},\,2.4)$

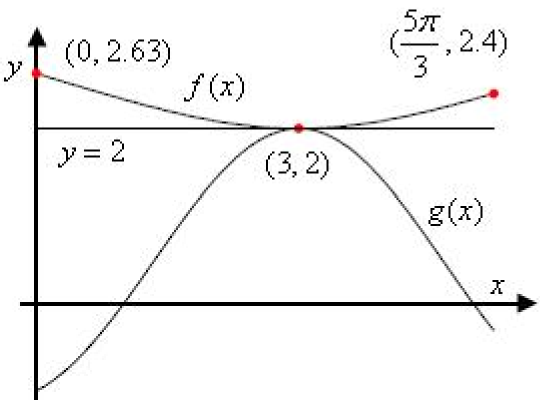
נקודות בהן הנגזרת מתאפסת:

$$f'(x)=\frac{2x-6}{(x^2-6x+18)\cdot\ell n3}\quad\rightarrow 2x-6=0\quad\rightarrow x=3$$

$$f(3)=\ell og_3(3^2-6\cdot3+18)=\ell og_3 9\quad\rightarrow(3,\,2)$$

וניתן לראות את התשובה בהתאם לערכי ה- y **בתחום הנתון.**

תשובה: מינימום מוחלט $(3,\,2)$ **, מקסימום מוחלט** $(0,\,2.63)$



(2) נתון כי נתון כי הישר $y=k$ **משיק לגרף של** $f(x)$

ולגרף של $g(x)$ **באותה נקודה, כאשר** $g'(x)=0$

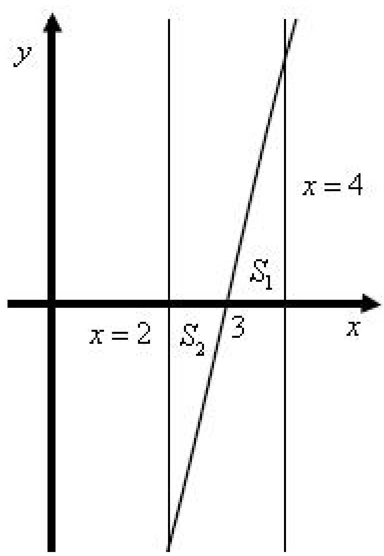
פעם אחת בלבד – כלומר נקודת ההשקה היא $(3,\,2)$ **.**

(3) פתרון המשוואה, $f(x)=g(x)$ **על פי הגרף הוא** $x=3$ **.**

ב. (1) $f'(x)>0$ **כאשר** $f(x)$ **עולה, כלומר בתחום** $3<x<\frac{5\pi}{3}$

$f'(x)<0$ **כאשר** $f(x)$ **יורדת, כלומר בתחום** $0<x<3$

(2) נצייר סקיצה של גרף הנגזרת על פי סעיף ב (1)



$$S_1=\int_3^4(f'(x)-0)\,dx=f(x)\Big]_3^4=$$
$$=\ell og_3(4^2-6\cdot4+18)-\ell og_3(3^2-6\cdot3+18)=$$
$$=\ell og_3(10)-\ell og_3(9)=0.096$$
$$S_2=\int_2^3(0-f'(x))\,dx=-f(x)\Big]_2^3=$$
$$=-\ell og_3(3^2-6\cdot3+18)+\ell og_3(2^2-6\cdot2+18)=$$
$$=-\ell og_3(9)-\ell og_3(10)=0.096$$
$$S=S_1+S_2=0.096+0.096=\boxed{0.192}$$

תשובה: גודל השטח 0.192 **יח"ר**