**א. נסמן את מהירות הזרם ב- $x$ (קמ"ש) .**

**בהתאם מהירות הרפסודה, שנעה עם הזרם, היא $x$ ,**

**ומהירותה העצמית של סירת המנוע היא $4x$.**

**כאשר הסירה שטה עם הזרם מהירותה $4x+x=5x$ , ונגד הזרם $4x-x=3x$.**

| | | זמן - $t$ שעות | מהירות - $v$ ק"מ לשעה | דרך-מרחק - $s$ ק"מ |
|---|---|---|---|---|
| מהתחלה עד | סירה | 3.75 | $3x$ | $11.25x$ |
| מפגש ראשון | רפסודה | 3.75 | $x$ | $3.75x$ |
| | סירה מ- B ל- A | 5 | $3x$ | $15x$ |
| מהתחלה עד שהסירה מגיעה בחזרה לעיירה B | סירה מ- A ל- B | 3 | $5x$ | $15x$ |
| | רפסודה | 8 | $x$ | $8x$ |

**משתי השורות הראשונות בטבלה, ניתן לראות שסכום**

**המרחקים שעוברים כלי השיט הוא $15x$,**

**ולכן זהו המרחק בין שתי העיירות.**

**בהתאם בשתי השורות הבאות ניתן למצוא את**

**זמן השיט של הסירה בכל כיוון,**

**ומכאן את זמן השיט של הרפסודה,**

**עד שהגיעה למרחק של 35 ק"מ מעיירה B.**

**לכן, המשוואה המתאימה מהשורה החמישית, היא $8x+35=15x$ ,**

**שפתרונה הוא $x=5$.**

**תשובה: מהירות הזרם היא 5 קמ"ש (זו גם מהירות הרפסודה),**

**ומהירות סירת המנוע במים עומדים היא 20 קמ"ש.**


**ב. במשך 5 השעות שסירת המנועה שטה מעיירה B לעיירה A, עברה הרפסודה 25 ק"מ $=5\cdot5$.**

**נסמן ב- $t$ (שעות) את הזמן שעבר מרגע יציאת סירת המנוע מעיירה A עד למפגש השני.**

**מהירות סירת המנוע, עם הזרם, היא 25 קמ"ש $=5x$.**

**לכן, המשוואה המתאימה היא $5t+25=25t$ , שפתרונה הוא $t=1.25$.**

**מכאן שהזמן שעבר מרגע יציאת הרפסודה מעיירה A ועד למפגש השני הוא 6.25 שעות $=5+1.25$.**

**תשובה: הזמן שעבר מרגע יציאת הרפסודה מעיירה A**

**עד שהסירה והרפסודה נפגשו בפעם השנייה הוא 6.25 שעות (שש ורבע שעות).**

**א. נתונה סדרה $a_n$ המקיימת:** $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$.

**עבור $n > 1$ ניתן לקבל את $a_n$ באמצעות הנוסחה** $a_n = S_n - S_{n-1}$.

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$a_n = S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}} - (k - \frac{1}{3^{n-1+1}})$$

$$a_n = S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}} - k + \frac{1}{3^n}$$

$$a_n = \frac{-1+3}{3^{n+1}}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{3^{n+1}}}$$

**תשובה: עבור $n > 1$ האיבר הכללי הוא** $a_n = \frac{2}{3^{n+1}}$ .

**ב. בסעיף א' הראינו כי עבור $n > 1$ האיבר הכללי הוא** $a_n = \frac{2}{3^{n+1}}$.

**כדי להראות שהסדרה היא הנדסית, נדרוש תחילה שהכלל יתפוס גם עבור** $n = 1$.

**נציב $n = 1$ בכלל מצאנו ונקבל:** $a_1 = \frac{2}{3^{1+1}} = \frac{2}{9}$.

**במקביל** $a_1 = S_1 = k - \frac{1}{3^{1+1}} = k - \frac{1}{9}$.

**לכן:** $k - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ **, ומכאן ש-** $k = \frac{1}{3}$.

**נוכיח שהסדרה $a_n = \frac{2}{3^{n+1}}$ (נכון לכל $n$ טבעי) היא סידרה הנדסית.**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1+1}}}{\frac{2}{3^{n+1}}} = \frac{2}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{2} = \frac{1}{3}.$$

**מכאן שהמנה בין כל שני איברים עוקבים קבועה (לא תלויה ב- $n$), כאשר** $q = \frac{1}{3}$.

**תשובה:** $k = \frac{1}{3}$ **, מנת הסדרה היא** $q = \frac{1}{3}$.

**ג. נתון כי** $T = a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 + ....$ **.**

**נוכיח שהסדרה** $T_n$ **היא סידרה הנדסית אין-סופית מתכנסת ונחשב את סכומה.**

$$\frac{a_{n+3}^2}{a_n^2} = \frac{(a_n q^3)^2}{a_n^2} = \frac{a_n^2 q^6}{a_n^2} = q^6 = (\frac{1}{3})^6 = \frac{1}{729}$$

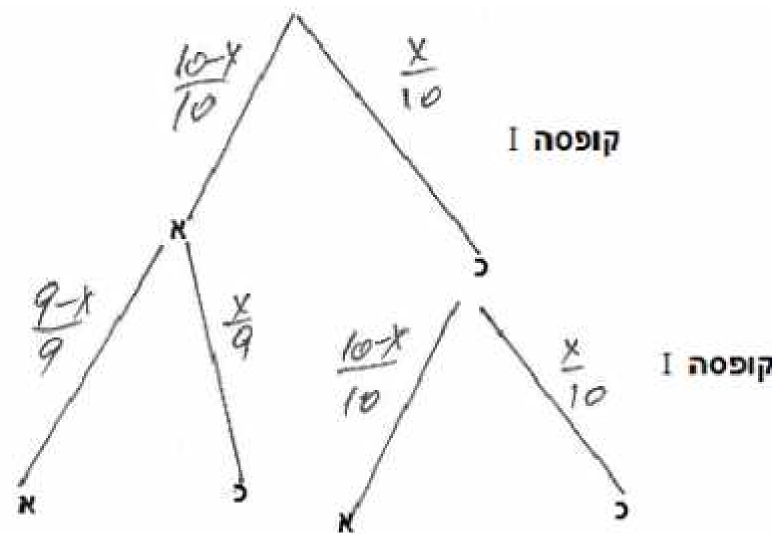
**מכאן שהמנה בין כל שני איברים עוקבים קבועה (לא תלויה ב-** $n$**),**

**כאשר** $q^* = \frac{1}{729}$ **, כלומר המנה היא בין** $-1$ **ל-** $1$ **והסדרה אין-סופית מתכנסת.**

$$T = \frac{a_2^2}{1-q^*} = \frac{(\frac{2}{27})^2}{1-\frac{1}{729}} = \frac{1}{182}$$

**תשובה:** $T = \frac{1}{182}$

**א. שתי ההוצאות הראשונות הן מקופסה I שבה $x$ כדורים כחולים, ו- $10-x$ כדורים אדומים,**
**באם יוצא כדור כחול מחזירים אותו לקופסה, ואם יוצא כדור אדום מעבירים אותו לקופסה II.**
**נציג עץ הסתברויות מתאים.**




**נתון כי ההסתברות שלאחר שתי ההוצאות מקופסה I יועבר כדור אדום אחד בלבד לקופסה II היא $\frac{19}{36}$.**

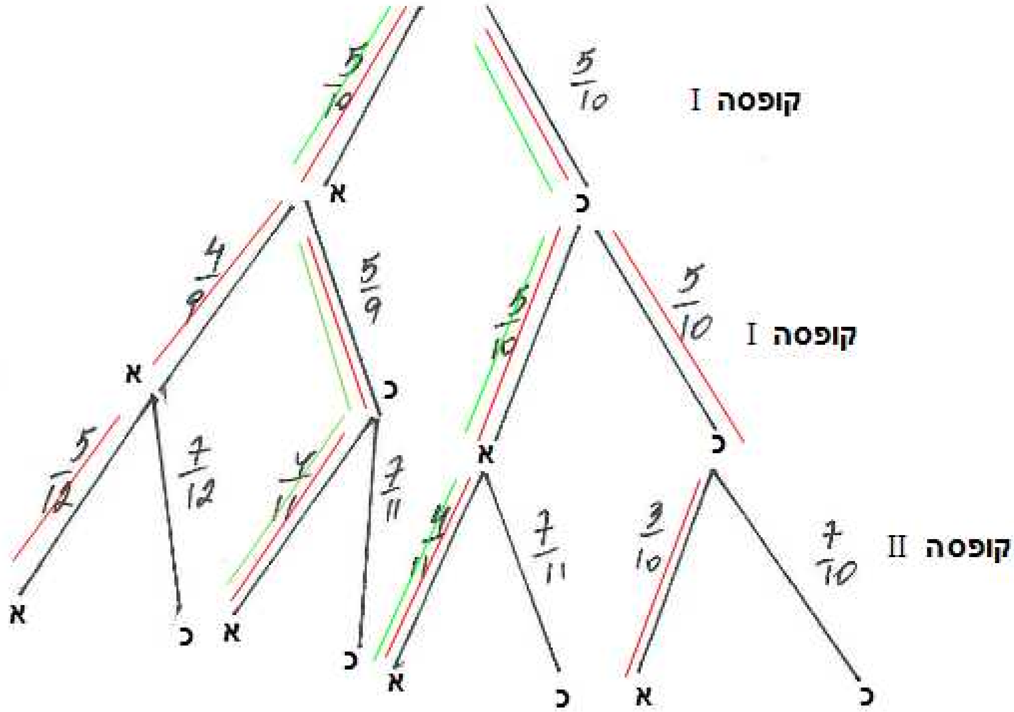
$$\frac{19}{36}=\frac{x}{10}\cdot\frac{10-x}{10}+\frac{10-x}{10}\cdot\frac{x}{9}$$
$$\frac{19}{36}=\frac{x(10-x)}{100}+\frac{x(10-x)}{90}$$
$$\frac{19}{36}=\frac{19x(10-x)}{900}$$
$$25=x(10-x)$$
$$x^2-10x+25=0$$
$$\boxed{x=5}$$

**תשובה: מספר הכדורים הכחולים שהיו בקופסה I לפני ההוצאה הראשונה הוא חמישה.**

**ב. אם כך, בקופסה I יש לפני ההוצאה הראשונה 5 כדורים כחולים ו- 5 אדומים.**

**בקופסה II יש לפני ההוצאה הראשונה 7 כדורים כחולים ו- 3 כדורים אדומים.**

**נציג עץ הסתברויות חדש, ונשים לב שאם הוצא כדור אדום מקופסה I, הוא מועבר לקופסה II, כך שבקופסה הראשונה יהיה אחד פחות ובשנייה אחד יותר.**




**נחשב את ההסתברות שהכדור שהוצא מקופסה II הוא אדום (מסלולים מסומנים באדום).**

$$P(red\ \ from\ box\ II) = \frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{11}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{11}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{12}$$

$$P(red\ \ from\ box\ II) = \frac{4271}{11880} \approx 0.3595$$

**תשובה: ההסתברות שהכדור שהוצא מקופסה II הוא אדום היא** $\frac{4271}{11880} \approx 0.3595$.

**ג. נחשב את ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II**

**נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיוק (משמע, לפני ההוצאה היו בה ארבעה כדורים אדומים).**

**אלו המסלולים הירוקים , מתוך המסלולים האדומים.**

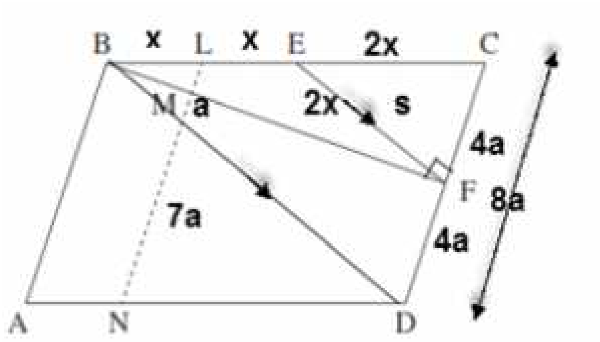
$$\text{P}(3\,red\ after\ /\ red\ \ from\ box\ II) = \frac{\text{P}(3\,red\ after \cap red\ \ from\ box\ II)}{\text{P}(red\ \ from\ box\ II)} =$$

$$\text{P}(3\,red\ after\ /\ red\ \ from\ box\ II) = \frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{11}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{11}}{\frac{4271}{11880}} =$$

$$\text{P}(3\,red\ after\ /\ red\ \ from\ box\ II) = \frac{2280}{4271} \approx 0.5338$$

**תשובה: ההסתברות שיישארו בקופסה II שלושה כדורים אדומים,**

**לאחר הוצאת כדור אדום היא** $\frac{2280}{4271} \approx 0.5338$.




**נתונים**

**1.** $ABCD$ **מקבילית . 2.** $\sphericalangle A < 90°$ **. 3.** $BE = EC$ **. 4.** $CF = FD$ **.**

**5.** $S_{\Delta ECF} = s$

**עבור ב: 6.** $BL = LE$ **. 6.** $LN \parallel AB$ **. עבור ג: 7.** $BE = EF$

**צ"ל: א.** $S_{ABCD}$ **ב.** $\frac{LM}{MN}$ **ג. האם** $ABFD$ **בר חסימה במעגל.**

| הסבר | | טענה | נימוק |
|---|---|---|---|
| 4 | 8 | $CF = FD$ | נתון |
| 5 | 9 | $S_{\Delta ECF} = s$ | נתון |
| 8, 9 | 10 | $S_{\Delta BCF} = 2s$ | התיכון $EF$ מחלק את $\Delta BCF$ לשני משולשים שווי שטח |
| 8, 10 | 11 | $S_{\Delta BCD} = 4s$ | התיכון $BF$ מחלק את $\Delta BCD$ לשני משולשים שווי שטח |
| 1 | 12 | $ABCD$ מקבילית | נתון |
| 11, 12 | 13 | $S_{ABCD} = 8s$ | האלכסון $BD$ מחלק את המקבילית לשני משולשים (חופפים) שווי שטח |
| **מ.ש.ל. א** | | | |
| 3 | 14 | $BE = EC = 2x$ | נתון וסימון |
| 6, 14 | 15 | $BL = LE = x$ | נתון וחישוב |
| 14, 15 | 16 | $\frac{BL}{BC} = \frac{1}{4}$ | חישוב |
| 6 | 17 | $LN \parallel AB$ | נתון |
| 12 | 18 | $DC \parallel AB$ | צלעות נגדיות מקבילות במקבילית |
| 17, 18 | 19 | $LN \parallel DC$ | שני ישרים המקבילים לישר שלישי, מקבילים |
| 16, 19 | 20 | $\frac{LM}{CF} = \frac{BL}{BC} = \frac{1}{4}$ | משפט תאלס הרחבה 1 |
| 8, 20 | 21 | $\frac{LM}{CD} = \frac{1}{8}$ | חישוב |
| 12 | 22 | $BC \parallel AD$ | צלעות נגדיות מקבילות במקבילית |
| 18, 22 | 23 | $LCDN$ מקבילית | שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות |
| 23 | 24 | $LN = CD$ | צלעות נגדיות שוות במקבילית |
| 21, 24 | 25 | $\frac{LM}{LN} = \frac{1}{8}$ | הצבה |
| 25 | 26 | $\frac{LM}{MN} = \frac{1}{7}$ | כללי פרופורציה |
| **מ.ש.ל. ב** | | | |

| הסבר | | טענה | נימוק |
|---|---|---|---|
| 7 | 27 | $BE = EF$ | נתון |
| 14, 27 | 28 | $BE = EF = EC$ | כלל המעבר |
| 28 | 29 | $\sphericalangle CFB = 90°$ | משפט הפוך לתיכון ליתר |
| 29 | 30 | $\sphericalangle DFB = 90°$ | זוויות צמודות משלימות ל- $180°$ |
| 2 | 31 | $\sphericalangle A < 90°$ | נתון |
| 30, 31 | 32 | $ABFD$ אינו בר חסימה במעגל | זוויות נגדיות לא משלימות ל- $180°$ |
| מ.ש.ל. ג | | | |

**א.** ABCD **טרפז החסום במעגל , ולכן הוא טרפז שווה שוקיים.**

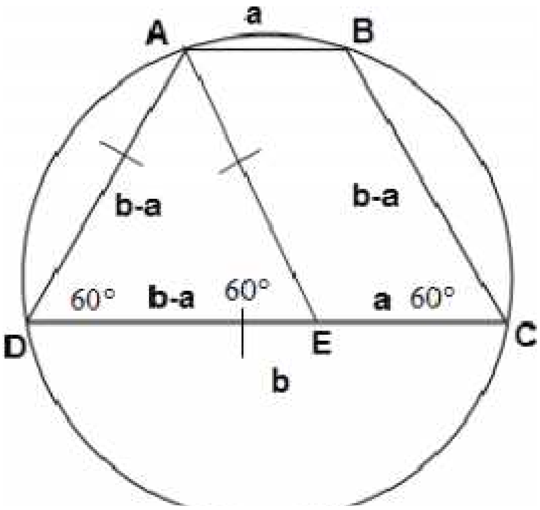
**הסבר – ניתן להעביר אלכסון, ולהראות זוויות מתחלפות שוות ובהתאם מיתרים וקשתות שוות.**

**נעביר** $AE \parallel BC$ **, ונקבל מקבילית** AECB **מימין (שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות)**

**ומשולש שווה צלעות משמאל (כל זוויותיו שוות** $60°$**, כי זוויות בסיס שוות בטרפז שווה שוקיים,**

$\sphericalangle AED = \sphericalangle BCD = 60°$ **, זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים).**

$CE = AB = a$ **, צלעות נגדיות שוות במקבילית,** $DE = b - a$ **ומכאן ש-** $BC = AD = b - a$ **.**




**תשובה:** $BC = AD = b - a$ **.**

**ב.** $\underline{\Delta ABD}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$\sphericalangle BAD = 180° - 60° = 120°$$

$$(BD)^2 = (AD)^2 + (AB)^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos\sphericalangle BAD$$

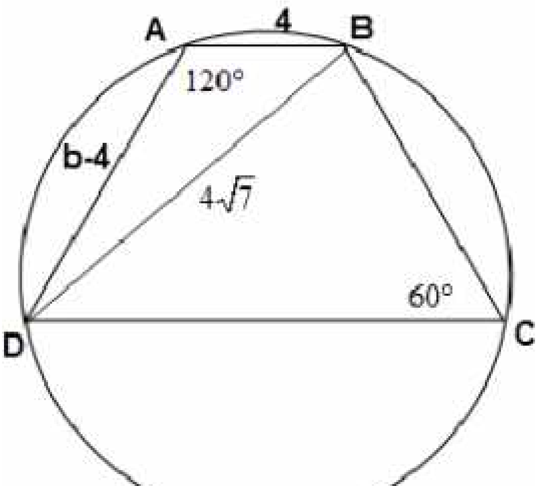
$$(4\sqrt{7})^2 = 16^2 + (b-4)^2 - 2 \cdot 4 \cdot (b-4) \cdot \cos 120°$$

$$112 = 16 + (b-4)^2 + 4(b-4)$$

$$(b-4)^2 + 4(b-4) - 96 = 0$$

$$b - 4 = 8 \quad \rightarrow \boxed{b = 12}$$

$$b - 4 = -12 \quad \rightarrow \cancel{b = -8}$$




**תשובה:** $b = 12$ **.**

**ג. (1) נמצא את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז, וגם את** $\Delta ABD$ **.**

$\underline{\Delta ABD}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{BD}{\sin 120°} = 2R$$

$$\frac{4\sqrt{7}}{2\sin 120°} = R$$

$$\boxed{R = 6.11cm}$$

**תשובה:** $6.11$ **ס"מ** $= R$**.**

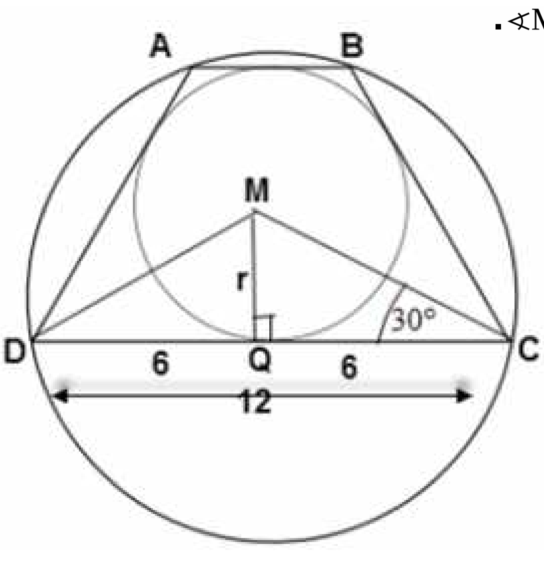
**(2) סכום אורכי השוקיים** $16$ **ס"מ**$= 8 + 8$**, שווה לסכום הבסיסים** $16$ **ס"מ**$= 4 + 12$**.**

**תשובה: ניתן לחסום מעגל בטרפז כי סכום צלעות נגדיות שווה.**

**(3) מרכז מעגל חסום הוא מפגש חוצי זוויות.** $\sphericalangle MCQ = 0.5 \cdot 60° = 30°$ **.**

$\underline{\Delta CMQ}$ **(** C **מרכז המעגל,** Q **נקודת ההשקה,** $\Delta DMC$ **שוקיים,**

**לכן הגובה** CQ **הוא גם תיכון)**




$$\tan 30° = \frac{r}{QC}$$

$$6\tan 30° = r$$

$$\boxed{r = 2\sqrt{3} \approx 3.464cm}$$

**תשובה:** $2\sqrt{3} \approx 3.464$ **ס"מ** $= r$ **.**

**א. נתונה הפונקציה** $f(x)=a-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}$ **(** $a$ **פרמטר).**

**(1) הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה אינו מתאפס.**

**תשובה: תחום ההגדרה:** $x\neq 2$ **.**

**(2) נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים.**

$x=2$ **מאפס שני מכנים, ולא את המונים, לכן הישר** $x=2$ **אסימפטוטה אנכית.**

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{(x-2)^2}=0$ **, ולכן** $y=a$ **אסימפטוטה אופקית.**

**תשובה:** $x=2$ **,** $y=a$ **.**

**(3) נמצא נקודות קיצון ונקבע את סוגן:**

$$f(x)=a-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{0-2(x-2)\cdot 1}{(x-2)^4}$$

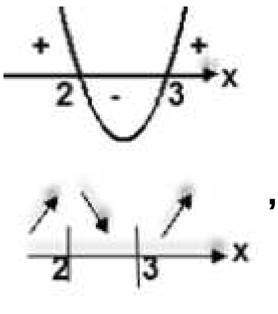
$$f'(x)=\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{2(x-2)}{(x-2)^4}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-2)^2-2(x-2)}{(x-2)^4}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-2)(x-2-1)}{(x-2)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2(x-2)(x-3)}{(x-2)^4}}$$

$$0=x-3\quad\to x=3\quad\to y=a-1\quad\to \boxed{(3,a-1)}$$




**מכנה הנגזרת חיובי, בתחום ההגדרה.**

**מונה הנגזרת מיוצג על ידי פרבולה בעלת מינימום,**

**שמתאפסת עבור** $x=2$ **(שאינו בתחום ההגדרה) ו-** $x=3$ **,**

**ובהתאם סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.**

**תשובה:** $(3,a-1)$ **, מינימום.**

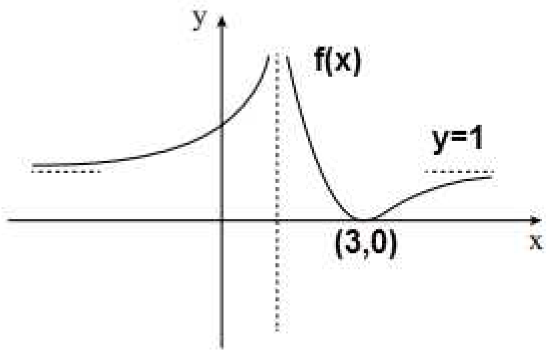
**(4) תשובה: עליה:** $x>3$ **או** $x<2$ **, ירידה:** $2<x<3$ **.**

**ב. נתון כי גרף הפונקציה משיק לציר ה- $x$ , כלומר בנקודת המינימום $(3,a)$ , שבה שיפוע המשיק הוא אפס.**

**ולכן $a-1=0$ ו- $a=1$ (כי שיעור ה- $y$ של נקודת המינימום, שעל ציר ה- $x$ , הוא אפס).**

**תשובה: $a=1$ .**

**ג. סקיצה מתאימה:**




**ד. נתון כי גרף הפונקציה $g(x)=|f(x)+k|$ משיק לאסימפטוטה האופקית של $f(x)$ , כלומר ל $y=1$ .**

**מכאן שהשיפוע של $g(x)=|f(x)+k|$ בנקודת ההשקה הוא אפס,**

**ולכן זה חייב להיות בנקודת המינימום שלה, שהיא $(3,|(0+k)|)=(3,|k|)$ .**

**מכאן ש- $|k|=1$ ו- $k=\pm1$ .**

**תשובה: $k=\pm1$ .**

**א. לגרף** $\text{II}$ **יש נקודת מקסימום ב-** $\text{C}$**, כאשר גרף** $\text{I}$ **עובר בנקודה זו מחיוביות לשליליות .**

**לכן גרף** $\text{II}$ **מתאים לפונקציה** $f(x)$ **, העוברת מעלייה לירידה בנקודה זו,**

**וגרף** $\text{I}$ **מתאים לפונקציה** $f'(x)$ **.**

**תשובה: גרף** $\text{II}$ **-** $f(x)$ **, גרף** $\text{I}$ **-** $f'(x)$ **.**

**ב.** $f'(x)=x(x+b)^3$ **(**$b>1$ **פרמטר). ל-** $f(x)$ **יש פיתול ב-** $x=-1$ **ולכן** $f''(-1)=0$ **.**

$$f''(x)=(x+b)^3+3x(x+b)^2$$
$$f''(x)=(x+b)^2(4x+b)$$
$$0=(x+b)^2(4x+b)$$
$$0=x+b \ \rightarrow 0=-1+b \ \rightarrow \cancel{b=1} \ \leftarrow b>1$$
$$0=4x+b \ \rightarrow 0=4(-1)+b \ \rightarrow \boxed{b=4} \quad o.k.$$

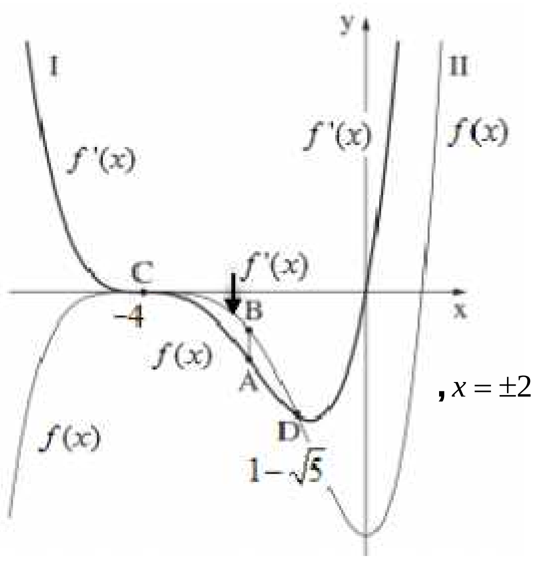
**תשובה:** $b=4$.

**ג. הפונקציה שיש למצוא לה מקסימום היא אורך הקטע** $\text{AB}$ **, בתחום** $-4<x<1-\sqrt{5}$ **.**

**כיוון ש-** $\text{AB}$ **מאונך לציר ה-** $x$ **, הרי ש-** $\text{AB}=y_\text{B}-y_\text{A}=f(x)-f'(x)$ **.**

**נמצא מקסימום לפונקציה זו.**

$$\text{AB}=f(x)-f'(x)$$
$$(\text{AB})'=f'(x)-f''(x)$$
$$(\text{AB})'=x(x+4)^3-(x+4)^2(4x+4)$$
$$(\text{AB})'=(x+4)^2\left[x(x+4)-(4x+4)\right]$$
$$(\text{AB})'=(x+4)^2(x^2+4x-4x-4)$$
$$\boxed{(\text{AB})'=(x+4)^2(x^2-4)}$$




**הכופל השמאלי חיובי בתחום. הכופל הימני מתאפס עבור** $x=\pm 2$ **,**

**כאשר** $x=-2$ **בתחום.**

**זו נקודת מקסימום, כי** $\text{AB}(-4)=\text{AB}(1-\sqrt{5})=0$ **,**

**ושאר ערכי** $\text{AB}$ **בתחום הינם חיוביים.**

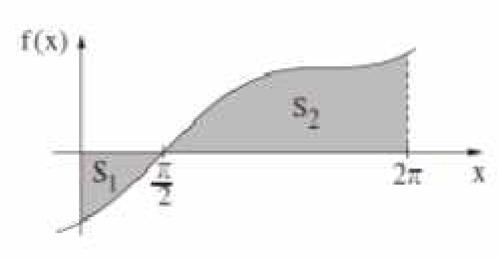
**תשובה:** $x_\text{A}=x_\text{B}=-2$ **, עבורם אורך הקטע** $\text{AB}$ **הוא מקסימלי.**

**א. גודל השטח האפור שבציור הוא** $10\pi^2+16$**, כלומר:** $S_1+S_2=10\pi^2+16$ **.**

**נתון גם כי** $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=8\pi^2$ **.**

**כיוון** $S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(0-f(x))\,dx$ **, מתקבל ש-** $-S_1+S_2=8\pi^2$ **.**

**נפתור את מערכת המשוואות:**




$$-\begin{cases} S_1+S_2=10\pi^2+16 \\ -S_1+S_2=8\pi^2 \end{cases}$$

$$2S_1=2\pi^2+16$$

$$\boxed{S_1=\pi^2+8}$$

**תשובה:** $S_1=\pi^2+8$ **.**

**ב. נמצא את** $F(\frac{\pi}{2})$**, כאשר נתון:** $F(0)=0$ **.**

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(0-f(x))\,dx$$

$$\pi^2+8=-F(\frac{\pi}{2})+F(0)$$

$$\pi^2+8=-F(\frac{\pi}{2})+0$$

$$\boxed{F(\frac{\pi}{2})=-\pi^2-8}$$

**תשובה:** $F(\frac{\pi}{2})=-\pi^2-8$ .

**ג. נמצא את** $f(x)$ **, כאשר נתון:** $f'(x)=8\sin x+8$ **ועל פי סעיף א מתקיים** $f(\frac{\pi}{2})=0$ **.**

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

$$f(x)=\int(8\sin x+8)\,dx$$

$$f(x)=-8\cos x+8x+c$$

$$f(\frac{\pi}{2})=0 \leftarrow 0=-9\cos(\frac{\pi}{2})+8(\frac{\pi}{2})+c \text{ .}$$

$$0=-9\cdot 0+4\pi+c$$

$$c=-4\pi$$

$$\boxed{f(x)=-8\cos x+8x-4\pi}$$

**תשובה:** $f(x)=-8\cos x+8x-4\pi$ **.**