א. נכין טבלה המתאימה לבעיות הספק.

	צינור	זמן (שעות)	הספק לשעה (מ"ק)	חלקי עבודה
כללי	**א'**	m	$\frac{1}{m}$	1
	ב'	$2m$	$\frac{1}{2m}$	1
4 שעות	**א'**	4	$\frac{1}{m}$	$\frac{4}{m}$
	ב'	4	$\frac{1}{2m}$	$\frac{4}{2m}=\frac{2}{m}$
יום מסוים	**א'**	4	$\frac{1}{m}$	$\frac{4}{m}$
	ב'	2	$\frac{1}{2m}$	$\frac{2}{2m}=\frac{1}{m}$

כאשר שני הצינורות פתוחים במקביל,

הבריכה הריקה מתמלאת לגמרי, ביותר מ- 4 **שעות, לכן** $\frac{4}{m}+\frac{2}{m}<1$ **.**

ביום מסוים, לאחר 4 **שעות מילוי של צינור א' ו-** 2 **שעות מילוי של צינור ב,**

יותר מ- $\frac{1}{2}$ **הבריכה הייתה מלאה, לכן** $\frac{4}{m}+\frac{1}{m}>\frac{1}{2}$**.**

$$\left.\begin{cases}\frac{4}{m}+\frac{2}{m}<1 & \rightarrow \frac{6}{m}<1 \quad \rightarrow m>6 \\ \frac{4}{m}+\frac{1}{m}>\frac{1}{2} & \rightarrow \frac{5}{m}>\frac{1}{2} \quad \rightarrow m<10 \\ m>0 & \end{cases}\right\} \boxed{6<m<10}$$

תשובה: תחום הערכים האפשרי של m **הוא** $6<m<10$ **.**

ב. ביום אחר, מחצית בריכה התמלאה – במשך 3.5 שעות שבהן ברז א' מילא,
בעוד שברז ב' רוקן בשעה הראשונה ומילא במשך 2.5 הבאות.

	צינור	זמן (שעות)	הספק לשעה (מ"ק)	חלקי עבודה
יום אחר	א'	3.5	$\frac{1}{m}$	$\frac{3.5}{m}$
	ב' מרוקן	1	$\frac{1}{2m}$	$\frac{1}{2m}$
	ב' ממלא	2.5	$\frac{1}{2m}$	$\frac{2.5}{2m}$

$$\frac{3.5}{m}-\frac{1}{2m}+\frac{2.5}{2m}=\frac{1}{2} \quad / \cdot 2m$$

$$7-1+2.5=m$$

$$\boxed{m=8.5}$$

$m=8.5$ **מתאים לתחום הערכים האפשרי של** m **:** $6<m<10$ **.**

תשובה: $m=8.5$

א. נתונה סדרה a_n **המקיימת את כלל הנסיגה:** $a_{n+1}=\frac{a_n}{4a_n+3}\ ,\quad a_1=-1$ **.**

נתונה סדרה b_n **המקיימת** $b_n=\frac{1}{a_n}+2=\frac{1+2a_n}{a_n}$ **.**

נראה שהסדרה b_n **היא סדרה הנדסית.**

$$b_{n+1}=\frac{1+2a_{n+1}}{a_{n+1}}=\frac{1+2\cdot\frac{a_n}{4a_n+3}}{\frac{a_n}{4a_n+3}}=\frac{\frac{4a_n+3+2a_n}{4a_n+3}}{\frac{a_n}{4a_n+3}}=\frac{6a_n+3}{a_n}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{6a_n+3}{a_n}}{\frac{1+2a_n}{a_n}}=\frac{3(2a_n+1)}{1+2a_n}=3 \ .$$

לכן, הסדרה b_n **היא סדרה הנדסית ומנתה** 3 **(קבועה, לא תלויה ב-** n **).**

$$b_1=\frac{1}{a_1}+2=\frac{1}{-1}+2=1$$

תשובה: הוכַח.

ב. נחשב את הסכום: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}$ **.**

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=b_1-2+b_2-2+...+b_n-2$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=b_1+b_2+...+b_n-2n$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=\frac{1(3^n-1)}{3-1}-2n$$

$$\boxed{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=\frac{3^n-1}{2}-2n}$$

תשובה: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=\frac{3^n-1}{2}-2n$ **.**

ג. נתון כי n הוא מספר זוגי.

נחשב את הסכום $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+...+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}$.

$$\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}=b_{n-1}-2-(b_n-2)=b_{n-1}-b_n$$

	איברים במקומות האי-זוגיים	איברים במקומות הזוגיים
A_1	$b_1=1$	$b_2=b_1q_b=1\cdot 3=3$
Q	$q_b^2=9$	$q_b^2=9$
N	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+...+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1(9^{\frac{n}{2}}-1)}{9-1}-\frac{3(9^{\frac{n}{2}}-1)}{9-1}=\frac{-2(3^n-1)}{8}$$

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+...+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1-3^n}{4}$$

תשובה: $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+...+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1-3^n}{4}$.

א. p - ההסתברות שאביגיל תפגע במטרה בניסיון בודד.

נתון כי ההסתברות שתפגע ב- 4 מתוך 5 זריקות רצופות,

גדול פי 3 מן הסיכוי שלה לפגוע בכל 5 הזריקות.

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$P_5(4) = 3P_5(5)$$

$$\binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^{5-4} = 3 \cdot p^5 \quad / : p^4 > 0$$

$$\frac{5!}{4!(5-4)!} \cdot (1-p) = 3p$$

$$5(1-p) = 3p$$

$$5 - 5p = 3p$$

$$\boxed{p = 0.625}$$

תשובה: $p = 0.625$.

ב. אביגיל תנצח במשחק אם תפגע במטרה ברוב זריקותיה, כלומר ב- 3 , 4 , או 5 זריקות.

$$P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = P_5(3) + 3P_5(5) + P_5(5)$$

$$\binom{5}{3} \cdot 0.625^3 \cdot (1-0.625)^{5-3} + 3 \cdot 0.625^5 + 0.625^5$$

$$\frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot 0.625^3 \cdot 0.375^2 + 4 \cdot 0.625^5$$

$$10 \cdot 0.625^3 \cdot 0.375^2 + 4 \cdot 0.625^5 = 0.7428$$

תשובה: ההסתברות שאביגיל תנצח במשחק היא 0.7428 .

ג. (1) אם אביגיל תחטיא את המטרה בזריקה השנייה.

אז היא תנצח במשחק אם תפגע ב- 3 , או 4 הזריקות האחרות.

$$P_4(3) + P_4(4) =$$

$$= \binom{4}{3} \cdot 0.625^3 \cdot (1-0.625)^{4-3} + 0.625^4 =$$

$$= 4 \cdot 0.625^3 \cdot 0.375 + 0.625^4 = 0.5188$$

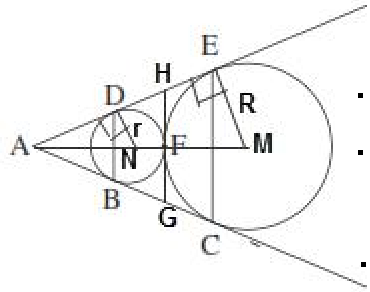
תשובה: ההסתברות שאביגיל תנצח במשחק, אם תחטיא בזריקה השנייה, הוא 0.5188 .

(2) לתמר סיכוי דומה לזה של אביגיל לפגוע במטרה בניסיון בודד.

תמר החטיאה בזריקה הראשונה, ולכן תנצח במשחק אם תפגע ב- 3 , או 4 הזריקות הבאות.

זה בדיוק כמו הסיכוי של אביגיל לפגוע ב- - 3 , או 4 זריקות מתוך 4 .

תשובה: ההסתברות שתמר תנצח במשחק היא 0.5188 .



<u>נתונים</u>

1. מעגל M **ומעגל** N **משיקים בנקודה** F .

2. AC **משיק למעגל** M **בנקודה** B **. 3.** AC **משיק למעגל** N **בנקודה** C.

4. AE **משיק למעגל** M **בנקודה** D **. 5.** AE **משיק למעגל** N **בנקודה** E.

עבור ב: 6. R **רדיוס מעגל** M **. 7** r **רדיוס מעגל** N

צ"ל: א. BDEC **טרפז שווה שוקיים ב.** GH **קטע אמצעים בטרפז** BDEC.

ג. $R \cdot BD = r \cdot CE$

הסבר		טענה	נימוק
2	8	AC **משיק למעגל** M **בנקודה** B	נתון
4	9	AE **משיק למעגל** M **בנקודה** D	נתון
8, 9	10	$AD = AB$	אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני משיקים למעגל, אז הם שווים זה לזה
3	11	AC **משיק למעגל** N **בנקודה** C	נתון
6	12	AE **משיק למעגל** N **בנקודה** E	נתון
11, 12	13	$AE = AC$	אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל – אז הם שווים זה לזה
10, 13	14	$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$	חישוב
14	15	$DB \parallel EC$	משפט תאלס הרחבה 1 הפוך
	16	$DE \nparallel BC$	המשכיהם נפגשים בנקודה A
15, 16	17	BDEC **טרפז**	זוג צלעות אחד של צלעות נגדיות מקבילות
10, 13	18	$DE = BC$	כלל החיסור
17, 18	19	BDEC **טרפז שווה שוקיים**	טרפז עם שוקיים שוות
מ.ש.ל. א			
1	20	**המעגלים משיקים בנקודה** F	נתון
9, 12, 20	21	$HE = HF$ $HD = HF$	אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני משיקים למעגל, אז הם שווים זה לזה
21	22	$HD = HE$	כלל המעבר
8, 11, 20	23	$GC = GF$ $GB = GF$	אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני משיקים למעגל, אז הם שווים זה לזה
23	24	$GB = GC$	כלל המעבר
17, 22, 24	25	GH **ק.א. בטרפז** BDEC	מחבר אמצעי שתי שוקיים
מ.ש.ל. ב			

הסבר		טענה	נימוק
12	26	$ME \perp AE$	הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה
9	27	$ND \perp AE$	הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה
8, 14	28	$ND \parallel EM$	שני ישרים שמאונכים לישר שלישי - מקבילים
28	29	$\frac{AD}{AE} = \frac{ND}{ME}$	משפט תאלס הרחבה 1
15	30	$\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$	משפט תאלס הרחבה 1
29, 30	31	$\frac{BD}{CE} = \frac{ND}{ME}$	כלל המעבר
31	32	$ME \cdot BD = ND \cdot CE$	חישוב
6, 7	33	$ND = r \quad , \quad ME = R$	נתון
32, 33	34	$R \cdot BD = r \cdot CE$	הצבה
מ.ש.ל. ג			

א. $ABCD$ **טרפז שווה שוקיים** $(BC \parallel AD)$**,** $\sphericalangle A = \sphericalangle D = \alpha$ **(זוויות בסיס שוות בטרפז שווה שוקיים).**

$\sphericalangle ABO = \alpha$ **(זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים** (ΔABO)**).**

$\sphericalangle AOB = 180° - 2\alpha$ **(סכום זוויות** ΔABO $180°$**).**

$\sphericalangle CBO = 180° - 2\alpha$ **(זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים).**

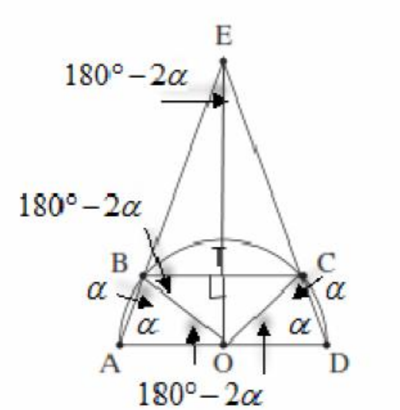
$OT \perp BC$ **(בניית עזר) ולכן** $BT = TC$ **(אנך ממרכז המעגל למיתר חוצה אותו).**

$\underline{\Delta BTO}$

$$\cos(180° - 2\alpha) = \frac{BT}{OB}$$

$$-R\cos 2\alpha = BT$$

$$\boxed{BC = -2R\cos 2\alpha}$$



תשובה: $BC = -2R\cos 2\alpha$ **.**

ב. נדרש $\cos 2\alpha < 0$ **, כי אורך הקטע** BC **הוא חיובי.**

$$90° < 2\alpha < 180°$$

$$45° < \alpha < 90°$$

תשובה: $45° < \alpha < 90°$.

ג. נתון כי $S_{\Delta AED} = 9S_{\Delta COD}$ **.**

כיוון שאלו משולשים דומים, על פי משפט דמיון זווית זווית זווית, הרי שיחס הדמיון הוא $3:1$.

לכן : $AE:OD = 3:1$ **ו-** $AE = 3R$ **.**

OT **אנך אמצעי לבסיס** AD **, ומכאן שהמשכו יגיע לקדקוד** E **(** EO **גובה ותיכון במש"ש** ΔAED**).**

$\underline{\Delta AEO}$

$$\cos\alpha = \frac{AO}{AE} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\alpha = 70.53°}$$

ΔAED **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{AE}{\sin 70.53°} = 2R_{\Delta AED}$$

$$\frac{3R}{2\sin 70.53°} = R_{\Delta AED}$$

$$R_{\Delta AED} = 1.591R$$

$$\boxed{\frac{R_{\Delta AED}}{R} = 1.591}$$

תשובה: היחס הוא 1.591**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^2+4x}{x^2+3x+b}$ **,** a,b **פרמטרים.**

$x=1$ **אסימפטוטה אנכית, לכן** $x=1$ **מאפס את המכנה ולא את המונה.**

$1^2+3\cdot1+b=0 \quad \to b=-4$ **.**

$y=1$ **אסימפטוטה אופקית, לכן** $a=1$ $\to \frac{ax^2}{x^2}=1 \quad \to \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+4x}{x^2+3x-4}=1$ **(חזקות שוות של מונה ומכנה).**

תשובה: $a=1$ **,** $b=-4$**.**

ב. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+4x}{x^2+3x-4}$ **.**

מכנה מתאפס עבור $x=1,\ x=-4$ **, כאשר** $x=-4$ **מאפס גם את המונה.**

$$f(x)=\frac{x^2+4x}{x^2+3x-4}=\frac{x(x+4)}{(x+4)(x-1)}=\frac{x}{x-1},\ x\neq-4,1$$

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x\neq-4,1$ **.**

(2) $f(x)=\frac{x}{x-1},\ x\neq-4,1$ **.**

תשובה: נקודות החיתוך היחידה של הפונקציה עם הצירים: $(0,0)$ **.**

(3) עבור $x=-4$ **נקבל נקודת אי רציפות סליקה (חור):** $\lim_{x\to-4}\frac{x^2+4x}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to-4}\frac{x}{x-1}=\frac{-4}{-4-1}=0.8$

ושיעורי נקודת אי הרציפות הם $(-4,0.8)$ **.**

תשובה: אין אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים.

(4) נמצא תחומי עלייה וירידה.

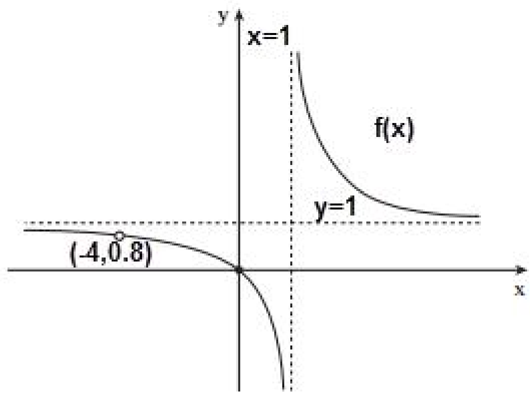
$$f'(x)=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}}$$

קבלנו ביטוי אלגברי שלילי.

תשובה: עלייה: אף x **. ירידה:** $x>1$ **, או** $-4<x<1$ **, או** $x<-4$ **.**

ג. סרטוט הסקיצה המתאימה, כולל סימון נקודת אי הרציפות



ד. בתחום $0 \le x < 1$ **מתקיים** $|f(x)| = -f(x)$ **.**

הסבר: בראשית הצירים $|f(0)| = |0| = 0$ **וגם** $-f(0) = -0 = 0$ **.**

בתחום $0 < x < 1$ **הגרף של** $f(x)$ **מתחת לציר ה-** x **,**

כאשר הן ל- $|f(x)|$ **והן ל-** $-f(x)$ **גרף סימטרי לציר ה-** x **(בהשוואה לפונקציה** $f(x)$ **).**

תשובה: בתחום $0 \le x < 1$.

ה. נתון $g(x) = f^2(x) f'(x)$ **.**

$g(0) = f^2(0) \cdot f'(0) = 0 \cdot (-1) = 0$ **.**

בשאר תחום ההגדרה, $x \ne -4,1$ **, מתקיים** $f^2(x) > 0$ **וגם** $f'(x) < 0$ **ולכן** $g(x) < 0$ **.**

מכאן שהשטח, שאת גודלו יש לחשב, נמצא מתחת לציר ה- x **.**

$$\int_0^{0.5} (0 - g(x))dx = \int_0^{0.5} (-f^2(x) f'(x))dx = -\frac{f^3(x)}{3}\Big]_0^{0.5} =$$

$$= -\frac{(\frac{0.5}{0.5-1})^3}{3} - (-\frac{(\frac{0}{0-1})^3}{3}) = -(-\frac{1}{3}) - 0 = \frac{1}{3}$$

תשובה: הוכַח.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, a פרמטר גדול מ- 0 (לסעיפים א-ו).

נמצא את תחום ההגדרה של $f(x)$, כאשר הביטוי בתוך מכנה השורש צ"ל חיובי.

$x^2-a^2>0$. מתקבלת פרבולה בעלת מינימום המתאפסת עבור $x=\pm a$.

תשובה: $x>a$ או $x<-a$.

ב. נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציות.

$x=\pm a$ מאפס את המכנה של $f(x)$ ולא את המונה ,

ולכן הישרים $x=\pm a$ אסימפטוטות אנכיות לציר x .

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}=\frac{x}{|x|}=\pm1$$

כאשר $x\to+\infty$ (לימין) ערכי הפונקציה חיוביים, ולכן $y=1$ אסימפטוטה אופקית.

כאשר $x\to-\infty$ (לשמאל) ערכי הפונקציה שליליים, ולכן $y=-1$ אסימפטוטה אופקית.

תשובה: אסימפטוטות המאונכות לצירים: $(x\to-\infty)y=-1$, $(x\to+\infty)y=1$, $x=-a, x=a$.

ג. נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-a^2}-\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{x^2-a^2}}}{x^2-a^2}$$

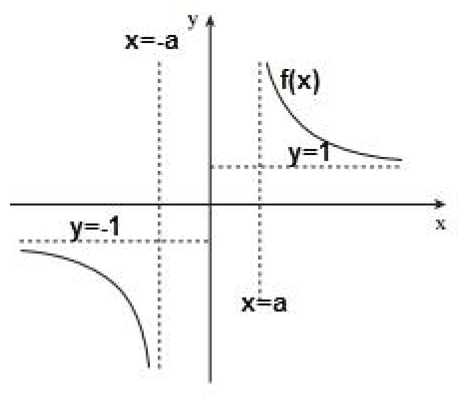
$$f'(x)=\frac{\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x^2-a^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-a^2}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}}}$$

המונה שלילי, המכנה חיובי, ולכן הנגזרת שלילית בתחום ההגדרה.

תשובה: עלייה: אף x , ירידה: $x>a$ או $x<-a$.

ד. סרטוט של גרף הפונקציה.



ה. $f'(x)=\frac{-a^2}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}}$

(1) $x=-a, x=a$ **- אסימפטוטות אנכיות גם כאן.**

$y=0$ **- אסימפטוטה אופקית – כי חזקת המונה קטנה מחזקת המכנה.**

תשובה: $x=-a, x=a$ **,** $y=0$ **.**

(2) שיקולים לסרטוט גרף הנגזרת.

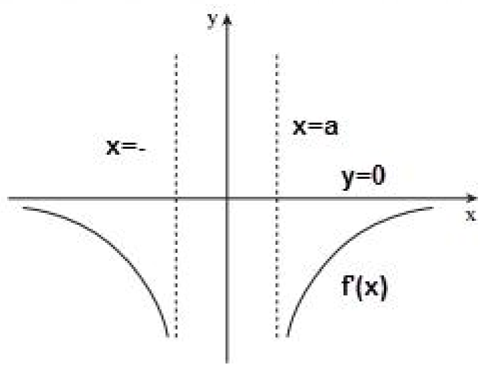
האסימפטוטות האנכיות והאסימפטוטה האופקית.

הנגזרת שלילית, בתחום ההגדרה.

אין סיבה להניח שקיימות נקודות פיתול של $f(x)$ **ולכן *לא* נסרטט נקודות קיצון ל-** $f'(x)$ **.**

על פי סרטוט $f(x)$ **- היא קעורה כלפי מעלה (** $\cup$ **) עבור** $x>a$ **ולכן** $f'(x)$ **עולה בתחום זה.**

היא קעורה כלפי מטה ($\cap$ **) עבור** $x<-a$ **ולכן** $f'(x)$ **יורדת בתחום זה.**



ו. $f(-x)=\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2-a^2}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}=-f(x)$ **, ולכן הפונקציה אי זוגית, סימטרית לראשית הצירים.**

שני הביטויים $\int_{2a}^{3a} f(x)dx$ **ו-** $\int_{-3a}^{-2a} f(x)dx$ **מייצגים שטחים, זהים בגדלם,**

כאשר הביטוי השני שלילי – כי השטח מתחת לציר ה- x **- ולכן סכומם** 0 **.**

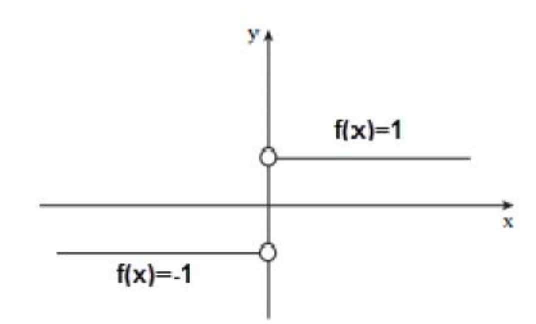
תשובה: ערך הביטוי הוא 0 **.**

ז. עבור $a=0$ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\frac{x}{|x|}$ **.**

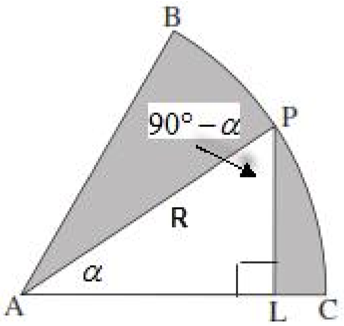
(1) תחום ההגדרה $x\neq 0$ **.**

(2) כאשר $x>0$ **(לימין) ערכי הפונקציה חיוביים, ולכן** $f(x)=1$ **.**

כאשר $x<0$ **(לשמאל) ערכי הפונקציה שליליים, ולכן** $f(x)=-1$ **.**



א. (1) הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *השטח האפור*.



נסמן $\sphericalangle PAC = \alpha$ **, כאשר** $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{3}$ **.**

$$S_{\Delta APL} = \frac{R^2 \sin\alpha \sin(90° - \alpha)}{2\sin 90°}$$

$$S_{\Delta APL} = \frac{R^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2}$$

$$S_{\Delta APL} = \frac{1}{4} R^2 \sin 2\alpha$$

$$\boxed{S_{GRAY} = \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{1}{4} R^2 \sin 2\alpha}$$

כיוון שהביטוי השמאלי חיובי, הרי שפונקציית השטח תקבל מינימום כאשר $\sin 2\alpha$ **יקבל ערך מקסימלי.**

כלומר, כאשר $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ **ומכאן ש** $\alpha = \frac{\pi}{4}$**.**

תשובה: : $\sphericalangle PAC = \frac{\pi}{4}$ **.**

(2) גודל השטח המינימלי $24\pi - 36$ **, ועבור** $\sphericalangle PAC = \frac{\pi}{4}$ **הוא גם** $\frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{1}{4} R^2$**.**

$$24\pi - 36 = \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{1}{4} R^2$$

$$12(24\pi - 36) = 2\pi R^2 - 3R^2$$

$$144(2\pi - 3) = R^2 (2\pi - 3) \quad / : (2\pi - 3) \neq 0$$

$$\boxed{R = 12} \quad \leftarrow R > 0$$

תשובה: $R = 12$ **.**

ב. השטח המקסימלי של משולש APL **מתקבל כאשר השטח האפור הוא מינימלי,**

כלומר עבור $\sphericalangle PAC = \frac{\pi}{4}$ **ו-** $R = 12$ **.**

תשובה: השטח המקסימלי של משולש APL **הוא** $S_{\Delta APL} = 36$ **.**