א. נסמן ב- x את מספר המחשבים שגל מרכיב בשעה, וב- y את מספר המחשבים שדני מרכיב בשעה.

נכניס את הנתונים, עבור יום העבודה הראשון, לטבלה מתאימה:

		זמן - t שעות	מספר חלקים בשעה (הספק)	מספר חלקים כולל (עבודה)
בתחילת העבודה	גל מ-8 עד 9	1	x	x
	דני עד 9	$\frac{x}{y}$	y	x
בכל שעות העבודה, של שני הטכנאים	גל עד 15	7	x	$7x$
	דני עד 13	$4+\frac{x}{y}=\frac{4y+x}{y}$	y	$4y+x$

שני הטכנאים הרכיבו את אותו מספר מחשבים ביום העבודה הראשון:

$$7x=4y+x \quad \rightarrow 6x=4y \quad \rightarrow \frac{x}{y}=\frac{2}{3}$$

מכאן שדני עבד $\frac{2}{3}$ שעה לפני השעה 9:00, ובהתאם התחיל לעבוד עשרים דקות אחרי השעה שמונה.

תשובה: דני התחיל לעבוד עשרים דקות לאחר השעה 8:00 .

ב. נסמן ב- t את זמן העבודה השווה , של שני הטכנאים, ביום השני, כאשר על פי סעיף א: $y=1.5x$.

	זמן - t שעות	מספר חלקים בשעה (הספק)	מספר חלקים כולל (עבודה)
גל	t	x	x
דני	t	$1.5x$	$1.5xt$

ביום העבודה הראשון הרכיבו שני הטכנאים ביחד $7x+7x=14x$ מחשבים.

$$tx+1.5tx=14x \quad /:x>0$$
$$2.5t=14$$
$$t=5.6$$

תשובה: הטכנאים עבדו ביחד, ביום העבודה השני, 5.6 שעות (חמש שעות ו- 36 דקות).

א. נתון כי בסדרה חשבונית, שיש בה n איברים, והפרשה 3, הכניסו בין כל שני איברים סמוכים איבר נוסף, כך שנוצרה סדרה חשבונית חדשה.

(1) מספר האיברים בסדרה החדשה הוא $2n-1$, כי לאחר האיבר האחרון לא הוסף איבר נוסף.

כיוון שהוכנס איבר בין כל שני איברים בסדרה הנתונה, והסדרה החדשה עדיין חשבונית,

הרי שהפרש הסדרה החדשה הוא מחצית מההפרש הקודם, כלומר 1.5.

נחשב את היחס בין סכום איברי הסדרה החדשה לבין סכום איברי הסדרה הנתונה.

$$\frac{S_{2n-1}}{S_n}=\frac{0.5\cdot(2n-1)\cdot\left[2a_1+1.5(2n-1-1)\right]}{0.5\cdot n\cdot\left[2a_1+3(n-1)\right]}$$

$$\frac{S_{2n-1}}{S_n}=\frac{(2n-1)\cdot\left[2a_1+3(n-1)\right]}{n\cdot\left[2a_1+3(n-1)\right]}$$

$$\boxed{\frac{S_{2n-1}}{S_n}=\frac{2n-1}{n}}$$

תשובה: הוכַח.

(2) נתון כי $\frac{2n-1}{n}=0.9$ ומכאן נקבל ש- $n=10$.

מכאן שהכניסו 9 איברים חדשים, כאשר ההפרש ביניהם הוא 3 !!,

כי בין כל שנים מהם יש איבר מהסדרה הנתונה.

נסמן את האיבר הראשון של סדרת האיברים המוכנסים ב- b_1.

$$130.5=\frac{9\cdot\left[2b_1+3(9-1)\right]}{2}$$

$$29=2b_1+24$$

$$b_1=2.5$$

$$a_1=2.5-1.5$$

$$\boxed{a_1=1}$$

תשובה: האיבר הראשון בסדרה הנתונה הוא 1.

ב. יוצרים סדרה חשבונית נוספת, על ידי הכנסת k איברים בין כל שני איברים עוקבים של הסדרה הנתונה.

כלומר את התחום שבין שני איברים עוקבים, חילקו ל- $k+1$ תחומים שווים בגודלם.

גודל התחום המקורי היה $d=3$, ולכן גודל כל מרווח חדש הוא $\frac{3}{k+1}$.

תשובה: הפרש הסדרה המתקבלת הוא $\frac{3}{k+1}$.

א. נסמן ב- p את ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד.

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $n=4$, $p=p$.

נתון כי ההסתברות שיעל תנצח ב- 2 משחקים, או 3 משחקים,

גדולה פי 10 מההסתברות שתנצח 4 משחקים.

מכאן ש- $P_4(2)+P_4(3)=10p^4$.

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$P_4(2)+P_4(3)=10p^4$$

$$\binom{4}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^{4-2}+\binom{4}{3}\cdot p^3\cdot(1-p)^{4-3}=10p^4$$

$$\frac{4!}{2!(4-2)!}\cdot p^2\cdot(1-p)^2+\frac{4!}{3!(4-3)!}\cdot p^3\cdot(1-p)^1=10p^4$$

$$6\cdot p^2\cdot(1-p)^2+4\cdot p^3\cdot(1-p)=10p^4 \quad /:2p^2$$

$$3\cdot(1-p)^2+2p\cdot(1-p)=5p^2$$

$$3-6p+3p^2+2p-2p^2=5p^2$$

$$4p^2+4p-3=0$$

$$\boxed{p=0.5} \quad (0<p<1)$$

תשובה: ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד היא 0.5 .

ב. נסמן ב- x את ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד.

בהתאם, ההסתברות לתיקו היא $1-0.5-x=0.5-x$.

תוצאה של שוויון בסבב השני, שבו שני משחקים,

תתקיים אם כל אחת מהמתמודדות תנצח פעם אחת בדיוק, או שתושגנה שתי תוצאות תיקו.

$$0.5x+x\cdot0.5+(0.5-x)^2=0.34$$

$$x+0.25-x+x^2=0.34$$

$$x^2=0.09$$

$$\boxed{x=0.3} \quad (0<x<1)$$

תשובה: ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד היא 0.3.

ג. ידוע שתוצאת הסבב השני היא שוויון.

יש למצוא את ההסתברות שאנה תנצח במשחק השני.

$$p(Ana\ will\ win\ 2nd\ match\ /\ tie\ )=\frac{P(Ana\ will\ win\ 2nd\ match\cap tie)}{P(tie)}=\frac{0.5\cdot0.3}{0.34}=\frac{15}{34}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{15}{34}$.

<u>נתונים</u>

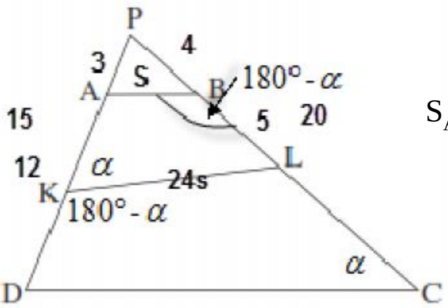
1. $ABLK$ **בר חסימה במעגל 2.** $KLCD$ **בר חסימה במעגל**

עבור ב:

3. 3 **ס"מ** $= PA$ **4.** 4 **ס"מ** $= PB$ **5.** s **סמ"ר** $= S_{\Delta ABP}$ **6.** $24s$ **סמ"ר** $= S_{ABCD}$

עבור ד: 7. 5 **ס"מ** $= BL$

צ"ל: א. $AB \| DC$ **ב.** $ABCD$ **בר חסימה במעגל ? ג.** PD **ד.** S_{KLCD}



הסבר		טענה	נימוק
2	8	$KLCD$ בר חסימה במעגל	נתון
	9	$\sphericalangle C = \sim$	סימון
8,9	10	$\sphericalangle LKD = 180° - \sim$	סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל $180°$
10	11	$\sphericalangle AKL = \sim$	זוויות צמודות משלימות ל- $180°$
1	12	$ABLK$ בר חסימה במעגל	נתון
11,12	13	$\sphericalangle ABL = 180° - \sim$	סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל $180°$
9, 13	14	$AB \| DC$	זוויות חד צדדיות משלימות ל- $180°$
		מ.ש.ל. א	
3	15	3 ס"מ $= PA$	נתון
4	16	4 ס"מ $= PB$	נתון
15, 16	17	$\sphericalangle PAB > \sphericalangle PBA$	מול צלע גדולה זווית גדולה ΔPAB
17	18	$\sphericalangle KAB < \sphericalangle ABK$	זוויות צמודות משלימות ל- $180°$
9, 13, 18	19	$ABCD$ אינו בר חסימה במעגל	סכום זוויות נגדיות אינו שווה ל- $180°$
		מ.ש.ל. ב	
14	20	$\frac{AB}{DC} = \frac{PB}{PC} = \frac{PA}{PD}$	משפט תאלס הרחבה 1
20	21	$\Delta PAB \sim \Delta PDC$	משפט דמיון צלע צלע צלע
5	22	s סמ"ר $= S_{\Delta ABP}$	נתון
6	23	$24s$ סמ"ר $= S_{ABCD}$	נתון
22, 23	24	$25s$ סמ"ר $= S_{\Delta PDC}$	סכום שטחים
21, 22, 24	25	$\frac{AB}{DC} = \frac{PB}{PC} = \frac{PA}{PD} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$	יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
15, 25	26	15 ס"מ $= PD$	חישוב
		מ.ש.ל. ג	

הסבר		טענה	נימוק
	27	$\sphericalangle P = \sphericalangle P$ (ז)	זווית משותפת
13	28	$\sphericalangle PBA = \sim$	זוויות צמודות משלימות ל- $180°$
11, 28	29	$\sphericalangle PBA = \sphericalangle AKL$ (ז)	כלל המעבר
27, 29	30	$\Delta PAB \sim \Delta PLK$	משפט דמיון זווית זווית
7	31	$BL = 5$ ס"מ	נתון
16, 31	32	$PL = 9$ ס"מ	סכום קטעים
15, 30, 32	33	$\frac{S_{\Delta PAB}}{S_{\Delta PLK}} = (\frac{PA}{PL})^2 = (\frac{3}{9})^2 = \frac{1}{9}$	יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
22, 33	34	$S_{\Delta PLK} = 9s$ סמ"ר	חישוב
22, 34	35	$S_{ABLK} = 8s$ סמ"ר	הפרש שטחים
23, 35	36	$S_{KLCD} = 16s$ סמ"ר	הפרש שטחים
מ.ש.ל. ד			

א. ΔCOD , ΔDOA **שווי שוקיים (רדיוסים שווים במעגל),** $\sphericalangle COD=\alpha$, $\sphericalangle BOA=3\alpha$.

$\sphericalangle BAO=\frac{180^\circ-3\alpha}{2}=90^\circ-1.5\alpha$ **(זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים, וסכום זוויות במשולש** 180°**)**

$\Delta DOA\cong\Delta COB$ **(משפט חפיפה צלע צלע צלע)**

$\sphericalangle DAO=\frac{360^\circ-4\alpha}{2}=180^\circ-2\alpha$ **(זווית עגולה שווה** 360° **וזוויות מתאימות במשולשים חופפים)**

$\sphericalangle DAO=\alpha$ **(זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים, וסכום זוויות במשולש** 180°**)**

תשובה: $\sphericalangle DAB=90^\circ-0.5\alpha$ **(סכום זוויות).**

ב. נוריד OJ **גובה ל-** AD **, ולכן גם תיכון במשולש שווה שוקיים** ΔDOA.

ΔDOJ **ישר זווית.**

$$\cos\alpha=\frac{AJ}{AO}$$

$$R\cos\alpha=AJ$$

$$\boxed{AD=2R\cos\alpha}$$

תשובה: אורך שוק הטרפז $2R\cos\alpha$ **(בטרפז חסום במעגל השוקיים שוות זו לזו) .**

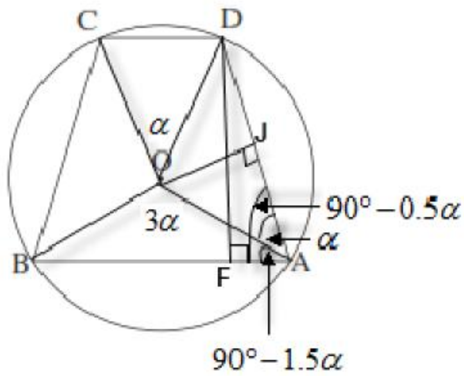
ג. נוריד DF **גובה לצלע** AB .

ΔDAF **ישר זווית.**

$$\sin(90^\circ-0.5\alpha)=\frac{DF}{DA}$$

$$\boxed{DA=\frac{h}{\cos 0.5\alpha}}$$

תשובה: אורך שוק הטרפז $\frac{h}{\cos 0.5\alpha}$.



ד. נתון: 5 **ס"מ** $S_{COD}=\dfrac{h^2}{12\cos^2 0.5\sim}$ **.**

על פי נוסחת שטח משולש, נקבל

$$\frac{h^2}{12\cos^2 0.5\sim}=\frac{R^2 sin\sim}{2}$$

$$\frac{h^2}{R^2}=6sin\sim\cos^2 0.5\sim$$

על פי תוצאות סעיפים ב-ד

$$2R\cos\sim=\frac{h}{\cos 0.5\sim}$$

$$\frac{h^2}{R^2}=4\cos^2\sim\cos^2 0.5\sim$$

ומשני הביטויים נקבל את המשוואה הטריגונומטרית הבאה.

$$6sin\sim\cos^2 0.5\sim=4\cos^2\sim\cos^2 0.5\sim \quad /:2\cos^2 0.5\sim>0$$

$$3\sin\sim=2\cos^2\sim$$

$$3\sin\sim=2(1-\sin^2\sim)$$

$$2\sin^2\sim+3\sin\sim-2=0$$

$$\sin\sim=0.5 \quad \leftarrow 0<\sin\sim<1$$

$$\boxed{\sim=30^\circ}$$

נפסל $\sim=150^\circ$

בגלל ש- $\sphericalangle BOA=3\sim$

תשובה: $\sim=30^\circ$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2\cos^2 x-1}{2\cos^2 x}$ **, בתחום** $0\le x\le\frac{\pi}{2}$**.**

(1) תחום ההגדרה $2\cos^2 x\ne 0 \quad \to \cos x\ne 0 \quad \to \boxed{x\ne\frac{\pi}{2}+\pi k}$

תשובה: $0\le x<\frac{\pi}{2}$**.**

(2) $x=\frac{\pi}{2}$ **מאפס מכנה ולא מונה, ולכן הישר** $x=\frac{\pi}{2}$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $x=\frac{\pi}{2}$ **אסימפטוטה אנכית.**

(3) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$0=\frac{2\cos^2 x-1}{2\cos^2 x}$$
$$0=2\cos^2 x-1$$
$$0=\cos 2x$$
$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k \to \boxed{(\frac{\pi}{4},0)}$$

תשובה: $(\frac{\pi}{4},0)$ **.**

(4) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון.

תחילה נקודת הקצה: $f(0)=\frac{2\cos^2 0-1}{2\cos^2 0}=0.5 \quad \to (0,0.5)$

$$f(x)=\frac{2\cos^2 x-1}{2\cos^2 x}=1-\frac{1}{2\cos^2 x}$$
$$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x}$$
$$f'(x)=\frac{\sin 2x}{\cos^4 x}$$
$$0=\sin 2x \quad \to 2x=\pi k \quad \to x=\frac{\pi}{2}k$$

ואין נקודות קיצון פנימיות.

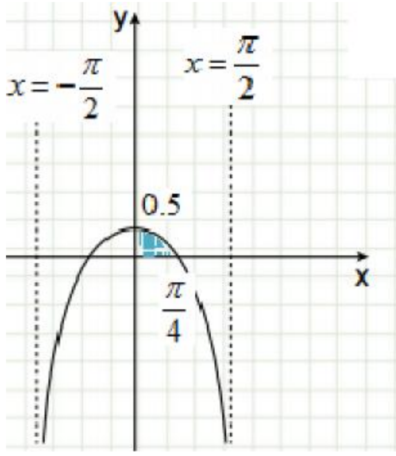
$(0,0.5)$ **מקסימום (קצה), לאור הירידה ממנה לנקודה** $(\frac{\pi}{4},0)$ **.**

תשובה: $(0,0.5)$ **מקסימום (קצה).**

ב. $f(x)=\frac{2\cos^2 x-1}{2\cos^2 x}$ **בתחום** $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

(1) $f(-x)=\frac{2\cos^2(-x)-1}{2\cos^2(-x)}=\frac{2\cos^2(x)-1}{2\cos^2(x)}=f(x)$ **ולכן הפונקציה זוגית.**

(2) סקיצה מתאימה, לרבות סימון השטח עבור סעיף ג, בהתבסס על זוגיות הפונקציה וסעיף א.



ג. נחשב את השטח המבוקש, תוך שימוש בהצגה הבאה של הפונקציה $f(x)=1-\frac{1}{2\cos^2 x}$ **,**

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{1}{2\cos^2 x}-0\right)dx$$

$$S=\left(x-\frac{\tan x}{2}\right)\Bigg]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

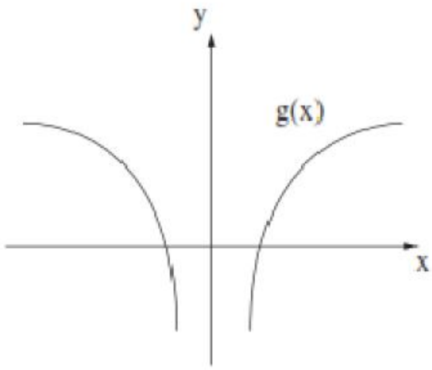
$$S=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tan\frac{\pi}{4}}{2}\right)-\left(0-\frac{\tan 0}{2}\right)$$

$$S=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-(0)$$

$$\boxed{S=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\approx 0.2854}$$

תשובה: $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\approx 0.2854$ **יח"ר.**

א. נתון הגרף של $g(x)$, שלו אסימפטוטה אנכית $x=0$, *ללא* נקודות קיצון או פיתול.

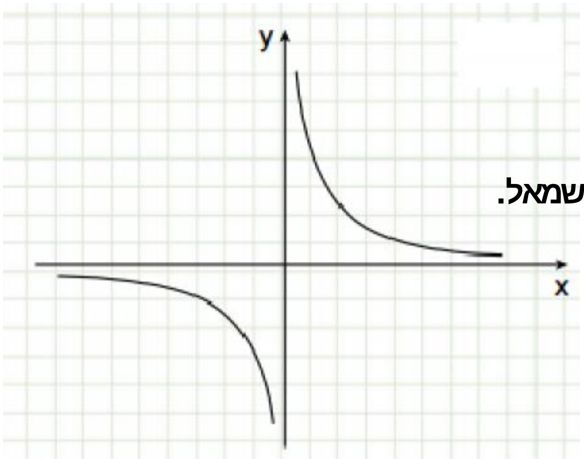


(1) עבור $x>0$ מתקיים $g(x)$ עולה, ולכן $g'(x)>0$.

עבור $x<0$ מתקיים $g(x)$ יורדת, ולכן $g'(x)<0$.

כמו כן גם ל- $g'(x)$ אין נקודות קיצון ואין נקודות פיתול,

וישנה אסימפטוטה אנכית $x=0$, ולכן הגרף המתאים משמאל.



(2) ל- $g(x)$ אין נקודות פיתול לכן הגרף של $g''(x)$ אינו חותך את ציר ה- x ,

$g'(x)$ יורדת בתחומים $x>0$, או $x<0$, ומכאן שהנגזרת שלה שלילית.

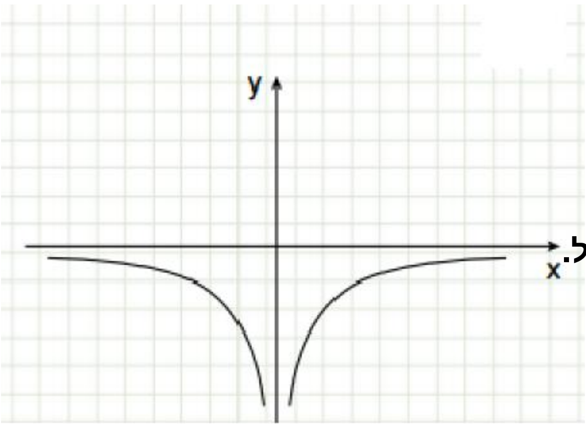
לכן הגרף של $g''(x)$ יהיה כולו מתחת לציר ה- x .

ניתן לראות גם בגרף של $g(x)$ שהיא קעורה כלפי מטה,

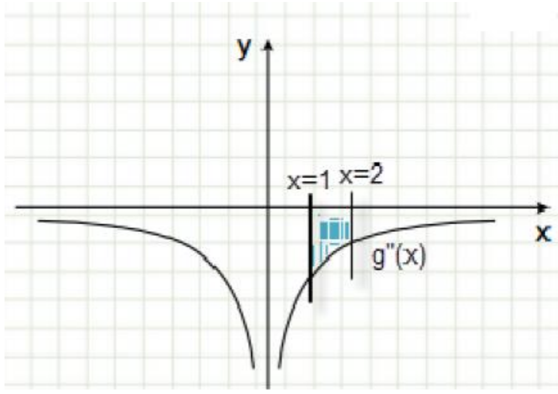
בתחומים $x>0$, או $x<0$, ולכן $g''(x)<0$

כמו כן גם ל- $g''(x)$ אין נקודות קיצון ואין נקודות פיתול,

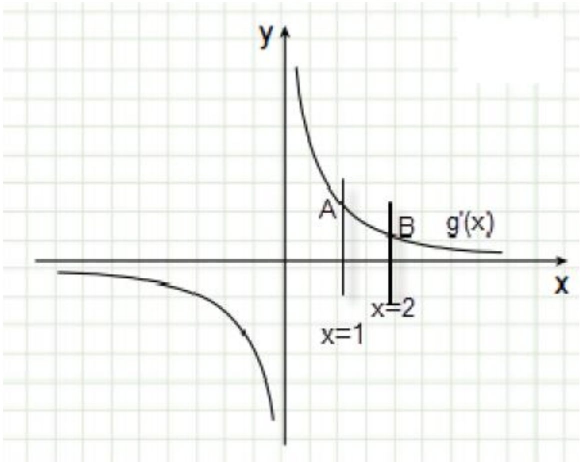
וישנה אסימפטוטה אנכית $x=0$, ולכן הגרף המתאים משמאל.



ב. נתון כי גודלו של השטח הצבוע שווה ל- 5.25 .



והישרים $x=1$ ו- $x=2$ חותכים את גרף הנגזרת בנקודות A ו- B בהתאמה.



$$\int_1^2 (0-g''(x))dx = -g'(x)\Big]_1^2$$

$$5.25 = -g'(2) - (-g'(1))$$

$$5.25 = g'(1) - g'(2)$$

$$5.25 = y_A - y_B$$

תשובה: $y_A - y_B = 5.25$.

ג. (1) סימן הביטוי $y=\frac{a}{x^3}$ **נקבע על ידי המכנה, כי נתון ש-** $a>0$.

מכאן שעבור $x>0$ **הוא חיובי, ועבור** $x<0$ **הוא שלילי, ולכן מתאים ל-** $g'(x)$.

תשובה: הביטוי $y=\frac{a}{x^3}$ **מתאר את הפונקציה** $g'(x)$.

(2) על פי סעיף ב, מתקיים: $y_A - y_B = 5.25$

$$\frac{a}{1^3} - \frac{a}{2^3} = 5.25$$

$$\frac{7}{8}a = 5.25$$

$$\boxed{a=6}$$

תשובה: $a=6$.

בגרות עו יולי 16 מועד קיץ ב שאלון 35806/35581

א. נסמן $AB = x$ **. נתון:** $AC = k$ **,** $\sphericalangle ABC = 90°$ **,** $\sphericalangle ADB = 90°$ **,** $AD = BD$ **.**

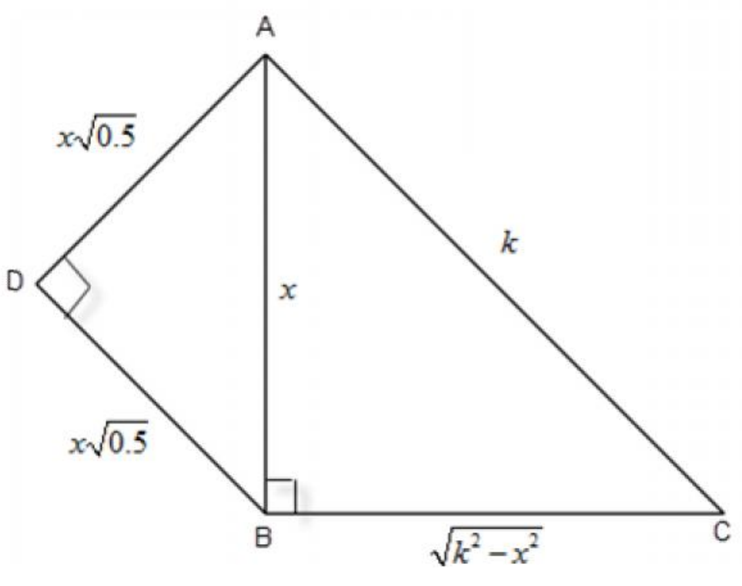
משפט פיתגורס ב- ΔABC **:**

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$
$$x^2 + (BC)^2 = k^2$$
$$(BC)^2 = k^2 - x^2$$
$$\boxed{BC = \sqrt{k^2 - x^2}}$$

תשובה: $BC = \sqrt{k^2 - x^2}$ **.**

ב. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא $BC \cdot AD^2$ **.**

משפט פיתגורס ב- ΔADB **:**

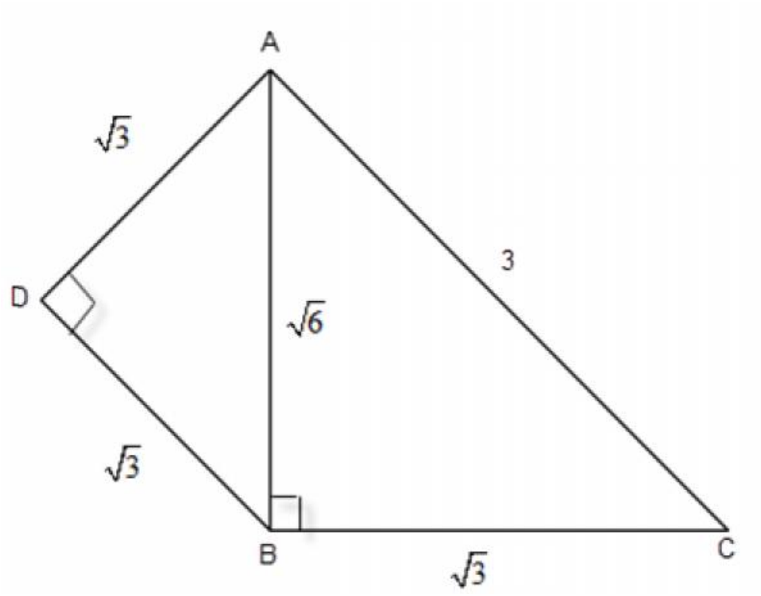


$$(AD)^2 + (BD)^2 = (AB)^2$$
$$2(AD)^2 = x^2$$
$$\boxed{(AD)^2 = 0.5x^2}$$
$$AD = x\sqrt{0.5}$$

$$\boxed{BC \cdot AD^2 = 0.5x^2\sqrt{k^2 - x^2}}$$
$$f(x) = 0.5x^2\sqrt{k^2 - x^2}$$
$$f'(x) = x\sqrt{k^2 - x^2} + \frac{0.5x^2(-2x)}{2\sqrt{k^2 - x^2}}$$
$$f'(x) = 2x(k^2 - x^2) - x^3$$
$$\boxed{f'(x) = x(2k^2 - 3x^2)}$$
$$2k^2 - 3x^2 = 0 \quad / \, x > 0$$
$$\boxed{x^2 = \frac{2k^2}{3}}$$
$$x = k\sqrt{\frac{2}{3}} \quad / \, x > 0$$

כיוון ש: $x > 0$ **ונמצא רק ערך אחד של קיצון, הרי שאין צורך להוכיח שהוא מקסימום.**

נתון כי הערך המקסימלי של המכפלה $BC \cdot AD^2$ **הוא** $3\sqrt{3}$**.**



$$BC \cdot AD^2 = 0.5x^2\sqrt{k^2 - x^2}$$

$$3\sqrt{3} = 0.5 \cdot \frac{2k^2}{3}\sqrt{k^2 - \frac{2k^2}{3}}$$

$$9\sqrt{3} = k^2\sqrt{\frac{k^2}{3}}$$

$$243 = \frac{k^6}{3}$$

$$k = 3 \quad / k > 0$$

$$x = 3\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6}$$

$$(AD)^2 = 0.5x^2$$

$$(AD)^2 = 0.5 \cdot 6 = 3$$

$$S_{\Delta ADB} = 0.5 \cdot (AD)^2 = 0.5 \cdot 3$$

$$\boxed{S_{\Delta ADB} = 1.5}$$

תשובה: שטח ΔADB **, כאשר המכפלה** $BC \cdot AD^2$ **היא מקסימלית, הוא** 1.5 **יח"ר.**